Exercice 9

Partie 1

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

1. Déterminez les limites de h en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $h'(x) = \dfrac{1-2|n(x)}{x^3}$.

3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ et vérifier que : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

5. Déterminer le signe de $h(x)$ pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

Partie 2

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

2. Déduire des résultats de la Partie 1 la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha\,;\,\alpha)$.

On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.