Exercice 9

Partie 1

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

1. Déterminez les limites de h en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $h'(x) = \dfrac{1-2|n(x)}{x^3}$.
3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ et vérifier que : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.
5. Déterminer le signe de $h(x)$ pour x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie 2

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

2. Déduire des résultats de la Partie 1 la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha\ ;\ \alpha)$.
On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.

Correction

Partie 1

1. • Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $h(x) = 1 + \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x)}{x}$.

On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$; donc par produit de limites $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = -\infty$.

• On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc par produit et somme de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$.
Donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de h en $+\infty$.

2. On admet que la fonction est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

3. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x > 0$ donc $x^3 > 0$: le signe de $h'(x)$ est donc celui du numérateur $1 - 2\ln x$.

$$1 - 2\ln x > 0 \iff 1 > 2\ln x \iff \frac{1}{2} > \ln x \iff \ln x < \frac{1}{2} \iff x < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

On en déduit le signe de $h'(x)$, si $x \in \left]0\,,\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$, $h'(x) \geq 0$ et si $x \in \left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,,\,+\infty\right[$, $h'(x) < 0$.

4. On dresse le tableau de variations de h sur $]0\,;\,+\infty[$.

Avec, $h\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 1 + \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^2} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}} = 1 + \frac{1}{2\mathrm{e}} \approx 1,18$

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$h'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$1 + \frac{1}{2\mathrm{e}}$	$\searrow$	1

D'après ce tableau de variations, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$.

On appelle α cette solution; $h\left(\frac{1}{2}\right) \approx -1,8 < 0$ et $h(1) = 1 > 0$ donc $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

5. D'après le tableau de variations et la question précédente $h(x) \leq 0$ pour $x \in]0, \alpha]$ et $h(x) > 0$ pour $x \in]\alpha\,;\,+\infty[$.

Partie 2

1. Pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$f_1(x) - f_2(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} - \left(x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}\right) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} - x + 2 + \frac{2\ln(x)}{x^2} = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2} = h(x)$

2.
— Comme $h(x) < 0$ sur $]0\,;\,\alpha[$, on a alors sur cet intervalle $f_1(x) < f_2(x)$ donc $\mathscr{C}_1$ est en dessous de $\mathscr{C}_2$.

— $h(x) > 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, donc sur cet intervalle $f_1(x) > f_2(x)$ donc $\mathscr{C}_1$ est au dessus de $\mathscr{C}_2$.

— $h(\alpha) = f_1(\alpha) - f_2(\alpha) = 0$ donc $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$; donc $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent au point d'abscisse α.

— L'ordonnée de ce point d'intersection est $f(\alpha) = \alpha - 1 - \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} = \alpha - \left(1 + \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}\right) = \alpha - h(\alpha) = \alpha$.

— Les deux courbes se coupent donc au point de coordonnées $(\alpha\,;\,\alpha)$.