

Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{5u_n}{1+4u_n}$.

1.
 - a. Calculer u_1 et u_2 .
 - b. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
2.
 - a. On admet que pour tout entier naturel n , $u_n < 1$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - b. Démontrer que la suite (u_n) converge.
3.
 - a. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 5.
 - b. Exprimer pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{5^n}{5^n+3}$.
 - d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .