Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{5u_n}{1+4u_n}$.

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

2. **a.** On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. **a.** Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 5.

   b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{5^n}{5^n+3}$.

   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Correction

1. **a.** $u_1 = \frac{5\times u_0}{1+4u_0} = \frac{5\times\frac{1}{4}}{1+4\times\frac{1}{4}} = \frac{5}{8}$ et

$$u_2 = \frac{5\times u_1}{1+4u_1} = \frac{5\times\frac{5}{8}}{1+4\times\frac{5}{8}} = \frac{\frac{25}{8}}{\frac{7}{2}} = \frac{25}{8}\times\frac{2}{7} = \frac{25}{28}$$

   b. Pour tout entier naturel n, notons P_n la propriété : $u_n > 0$. On va montrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   Initialisation : On a : $u_0 = \frac{1}{4} > 0$, donc P_0 est vraie.
   Hérédité : Soit n un entier naturel, supposons que P_n soit vraie. On a donc : $u_n > 0$. D'où : $5u_n > 0$ et $1+4u_n > 0$. Et comme $u_{n+1} = \frac{5u_n}{1+4u_n}$, u_{n+1} est le quotient de deux nombres strictement positifs, on a alors $u_{n+1} > 0$. Donc P_{n+1} est vraie.
   Conclusion : pour tout naturel n, $u_n > 0$.

2. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n}{1+4u_n} - u_n = \frac{u_n(4-u_n)}{1+4u_n}$$

   Or, on a admis que $u_n < 1$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N},\ 4-u_n > 0$. Comme $u_n > 0$ et $1+4u_n$ on a finalement $\frac{u_n(4-u_n)}{1+4u_n} > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est croissante.
   Autre méthode : On a montrer dans la question précédente que la suite (u_n) est strictement positive. Par conséquent, pour étudier ses variations, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 pour tout entier naturel n.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5u_n}{1+4u_n}}{u_n} = \frac{5}{1+4u_n}$$

   On a admis que $u_n < 1$, d'où : $1+4u_n < 1+4\times 1$, soit : $1+4u_n < 5$, ce qui entraîne que : $\frac{5}{1+4u_n} > 1$. On a donc montré que, pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

   b. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Donc d'après le théorème de la convergence monotone elle converge vers une limite l, et de plus : $0 \leq l \leq 1$.

3. **a.** Pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{5u_n}{1+4u_n}}{1-\frac{5u_n}{1+4u_n}} = \frac{\frac{5u_n}{1+4u_n}}{\frac{1+4u_n-5u_n}{1+4u_n}} = \frac{5u_n}{1-u_n} = 5\frac{u_n}{1-u_n} = 5v_n$$

Donc, pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 5v_n$. Par conséquent, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 5.

b. Le premier terme de la suite (v_n) est $v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$. Donc pour tout entier naturel $n,\ \ v_n = v_0 \times 5^n = \frac{1}{3} \times 5^n$.

c. Soit n un entier naturel.

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \iff (1-u_n)v_n = u_n \iff v_n = u_n + u_n v_n$$
$$\iff \frac{v_n}{1+v_n} = u_n \iff u_n = \frac{\frac{1}{3} \times 5^n}{\frac{1}{3} \times 5^n + 1} = \frac{5^n}{5^n+3}$$

Finalement : Pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{5^n}{5^n+3}$

d. On factorise par 5^n et on simplifie. $u_n = \frac{5^n}{5^n(1+\frac{3}{5^n})} = \frac{1}{1+\frac{3}{5^n}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{3}{5^n}) = 1+0 = 1$. Donc on obtient finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

La suite (u_n) converge vers 1 .