

Correction

Partie I : lectures graphiques

1. La courbe représentative de la fonction dérivée f' coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $\frac{2}{5}$, donc $f'(0) = \frac{2}{5} = 0,4$.
2. a. D'après le graphique :
 - si $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$, f' est décroissante;
 - Si $x \in [-2; 1]$, f' est croissante.
- b. $f''(x) > 0$ sur l'intervalle $[-2; 1]$ car f' est croissante sur cet intervalle; la fonction f est donc convexe sur l'intervalle $[-2; 1]$.

Partie II : étude de fonction

1. — Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + \frac{5}{2} = +\infty$, et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ on alors par composition de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 — Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \ln x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right) = \ln x^2 + \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right)$. On a donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right) = \ln 1 = 0$. Par somme de limites on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
2. On pose $f(x) = \ln u(x)$, avec $u(x) = x^2 + x + \frac{5}{2}$.
 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$ (car $\Delta = -9 < 0$), f est donc définie sur \mathbb{R} et elle est dérivable sur cet intervalle comme composée de fonctions dérivables : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (\ln u)' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$$

3. Comme le dénominateur $x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$ sur \mathbb{R} ; le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $2x+1$:
 D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$	$\ln \frac{9}{4}$	$+\infty$

$$\text{Avec } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = \ln \frac{9}{4}.$$

4. a. La fonction f est continue car dérivable sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et puisque $2 \in \left[\ln \frac{9}{4}; +\infty\right[$ ($\ln \frac{9}{4} \approx 0,81$), il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ tel que $f(\alpha) = 2$.

b. La calculatrice donne :

x	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	0,811	0,916	1,179	1,504	1,833	2,140

$\alpha \in]1; 2[$

x	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	1,833	1,896	1,959	2,020	2,081	2,140

$\alpha \in]1,7; 1,8[$

x	1,7	1,71	1,72	1,73	1,74	1,75	1,76	1,77
$f(x)$	1,959	1,965	1,971	1,977	1,983	1,990	1,996	2,002

$\alpha \in]1,76; 1,77[$

Conclusion $\alpha \approx 1,7$ à 10^{-1} près et $\alpha \approx 1,76$ à 10^{-2} près.

5. Les points d'inflexion de la fonction f sont les points où la fonction dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe.

Comme quel que soit le réel x , $(x^2 + x + \frac{5}{2})^2 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui du numérateur $-2x^2 - 2x + 4$, soit celui du trinôme $-2(x-1)(x+2)$ qui s'annule en $x = 1$ et $x = -2$ en changeant de signe.

Conclusion : La courbe représentative de la fonction f a deux points d'inflexion d'abscisses $x = 1$ et $x = -2$.