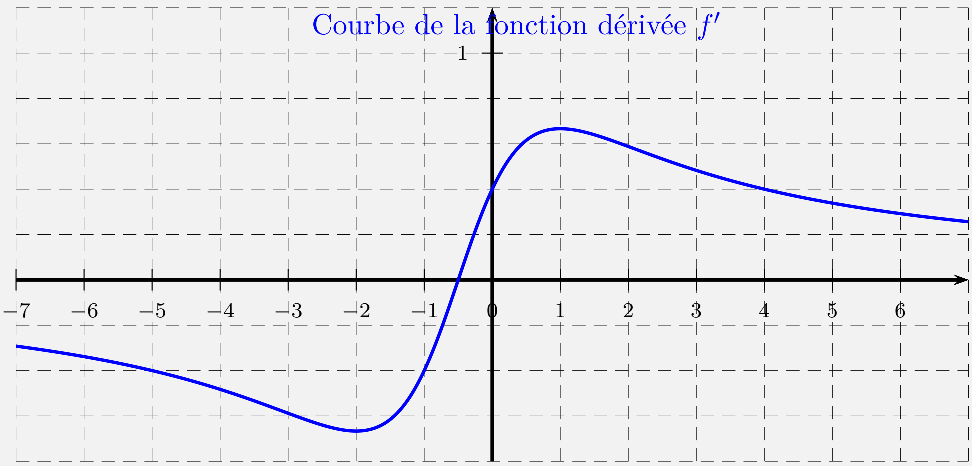
Exercice 7
Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.

2. **a.** Donner les variations de la fonction dérivée f'.

b. En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.

4. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$$

Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

Correction

Partie I : lectures graphiques

1. La courbe représentative de la fonction dérivée f' coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $\dfrac{2}{5}$, donc $f'(0) = \dfrac{2}{5} = 0,4$.

2. **a.** D'après le graphique :
- si $x \in]-\infty,\ -2[\cup]1, +\infty[$, f' est décroissante ;
- Si $x \in [-2\ ;\ 1]$, f' est croissante.

b. $f''(x) > 0$ sur l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$ car f' est croissante sur cet intervalle ; la fonction f est donc convexe sur l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$.

Partie II : étude de fonction

1.
- Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2+x+\frac{5}{2} = +\infty$, et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ on alors par composition de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \ln x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2}\right) = \ln x^2 + \ln\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2}\right)$. On a donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln x^2 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{2x^2}\right) = \ln 1 = 0$. Par somme de limites on obtient $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. On pose $f(x) = \ln u(x)$, avec $u(x) = x^2+x+\dfrac{5}{2}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R},\ u(x) > 0$ (car $\Delta = -9 < 0$), f est donc définie sur $\mathbb{R}$ et elle est dérivable sur cet intarvalle comme composée de fonctions dérivables :Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (\ln u)' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$$

3. Comme le dénominateur $x^2+x+\dfrac{5}{2} > 0$ sur $\mathbb{R}$; le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $2x+1$:
D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$	$\ln\frac{9}{4}$	$+\infty$

Avec $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\right) = \ln\dfrac{9}{4}$.

4. **a.** La fonction f est continue car dérivable sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et puisque $2 \in \left[\ln\frac{9}{4}\ ;\ +\infty\right[$ $(\ln\dfrac{9}{4} \approx 0,81)$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique $\alpha \in \left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ tel que $f(\alpha) = 2$.

x	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	0,811	0,916	1,179	1,504	1,833	2,140

$\alpha \in]1\ ;\ 2[$

x	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	1,833	1,896	1,959	2,020	2,081	2,140

$\alpha \in]1,7\ ;\ 1,8[$

x	1,7	1,71	1,72	1,73	1,74	1,75	1,76	1,77
$f(x)$	1,959	1,965	1,971	1,977	1,983	1,990	1,996	2,002

$\alpha \in]1,76\ ;\ 1,77[$

b. La calculatrice donne :
Conclusion $\alpha \approx 1,7$ à 10^{-1} près et $\alpha \approx 1,76$ à 10^{-2} près.

5. Les points d'inflexion de la fonction f sont les points où la fonction dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe.
Comme quel que soit le réel x, $\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui du numérateur $-2x^2 - 2x + 4$, soit celui du trinôme $-2(x-1)(x+2)$ qui s'annule en $x = 1$ et $x = -2$ en changeant de signe.

Conclusion : La courbe représentative de la fonction f a deux points d'inflexion d'abscisses $x = 1$ et $x = -2$.