

## Correction

### Partie I : étude d'une fonction auxiliaire

- La fonction  $g$  est définie sur  $]0, +\infty[$ , on détermine les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $0$ .
  - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 = +\infty$  d'où par somme des limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
  - $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x - 2 = -2$  d'où par somme des limites  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$
- La fonction  $g$  est somme de deux fonction dérivables sur  $]0, +\infty[$ ,  $g'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0$ ; donc la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .
- On dresse le tableau des variations de la fonction  $g$  :

$x$	$0$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

D'après ce tableau de variations, la fonction  $g$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  de plus  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ . Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $]0, +\infty[$ .

- $g(1) = \ln 1 + 2 - 2 = 0$  donc  $\alpha = 1$ .  
On en déduit que  $g(x) < 0$  sur  $]0, 1[$ , et que  $g(x) > 0$  sur  $]1, +\infty[$ .

### Partie II : étude d'une fonction $f$

- Pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ , on a :
 
$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)(\ln(x) - 1) + \left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x) - 1 + 2x - 1}{x^2} = \frac{\ln(x) + 2x - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$
  - Quel que soit  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $x^2 > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $g(x)$  qu'on a établi dans la question I-4. On a  $f(1) = \left(2 - \frac{1}{1}\right)(\ln(1) - 1) = -1$   
On dresse le tableau de variations de  $f$  :

$x$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$		$-1$	

- $f(x) = 0 \iff 2 - \frac{1}{x} \ln(x) - 1 = 0 \iff 2 - \frac{1}{x} = 0$  ou  $\ln(x) - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$  ou  $x = e$   
L'équation  $f(x) = 0$  admet donc deux solutions sur  $]0, +\infty[$  :  $x = \frac{1}{2}$  et  $x = e$ .  
On dresse le tableau de variations de la fonction  $f$  :

$x$	$0$	$\frac{1}{2}$	$1$	$e$	$+\infty$
$f(x)$		$0$	$-1$	$0$	

On en déduit le tableau de signes de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  :

$x$	$0$	$\frac{1}{2}$	$1$	$e$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

### Partie III : étude d'une fonction $F$ admettant pour dérivée la fonction $f$

1. Comme  $F' = f$ , les variations de la fonction  $F$  sont donc déterminées par le signe de  $f(x)$  établi en II-2. On en déduit que  $F$  est croissante sur les intervalles  $]0, \frac{1}{2}[$  et  $]0, +\infty[$  et  $F$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ .
2. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse  $x = a$  à la courbe  $\mathcal{C}_F$  est  $f(a)$ . Pour que  $\mathcal{C}_F$  admette des tangentes parallèles à l'axe des abscisses, il faut trouver des valeurs de  $x$  pour lesquelles  $f(x) = 0$ .  
D'après la question II-2,  $\mathcal{C}_F$  admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, en  $x = \frac{1}{2}$  et en  $x = e$ .