

Exercice 8

Partie I : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) + 2x - 2.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0 .
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0; +\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0; +\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction f

On considère la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1).$$

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa dérivée. Démontrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

- b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0; +\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f .

Ainsi, on a : $F' = f$.

On note \mathcal{C}_F la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de F sur $]0; +\infty[$.
2. La courbe \mathcal{C}_F représentative de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses?
Justifier la réponse.