Exercice 8

Partie I : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) + 2x - 2.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie II : Élude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1)\,.$$

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa dérivée.
   Démontrer que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a :

   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f.
Ainsi, on a : $F' = f$.
On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Etudier les variations de F sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. La courbe $\mathscr{C}_F$ représentative de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?
   Justifier la réponse.

Correction

Partie I : étude d'une fonction auxiliaire

1. La fontion g est définie sur $]0, +\infty[$,on détermine les limites de g en $+\infty$ et en 0.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2 = +\infty$ d'où par somme des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2x-2 = -2$ d'où par somme des limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty$

2. La fonction g est somme de deux fonction dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{x} + 2 > 0$; donc la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. On dresse le tableau des variations de la fonction g :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

D'après ce tableau de variations, la fonction g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ de plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. $g(1) = \ln 1 + 2 - 2 = 0$ donc $\alpha = 1$.
On en déduit que $g(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$, et que $g(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

Partie II : étude d'une fonction *f*

1. **a.** Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)(\ln(x)-1) + \left(2-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x)-1+2x-1}{x^2} = \frac{\ln(x)+2x-2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. Quel que soit $x \in]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ qu'on a établit dans la question I-4. On a $f(1) = \left(2-\dfrac{1}{1}\right)(\ln(1)-1) = -1$

On dresse le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-1	↗	

2. $f(x) = 0 \iff 2 - \dfrac{1}{x}\ln(x) - 1 = 0 \iff 2 - \dfrac{1}{x} = 0$ ou $\ln(x) - 1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = \mathrm{e}$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions sur $]0\,;\,+\infty[$: $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = \mathrm{e}$.

On dresse le tableau de variations de la fonction f :

x	0		$\frac{1}{2}$		1		e		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↘	-1	↗	0	↗	

On en déduit le tableau de signes de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie III : étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

1. Comme $F' = f$, les variations de la fonction F sont donc déterminées par le signe de $f(x)$ établit en II-2. On en déduit que F est croissante sur les intervalles $]0, \frac{1}{2}[$ et $]0, +\infty[$ et F est décroissante sur $[0, +\infty[$.
2. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $x = a$ à la courbe $\mathscr{C}_F$ est $f(a)$. Pour que $\mathscr{C}_F$ admette des tangentes parallèles à l'axe des abscisses, il faut trouver des valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.

   D'après la question II-2, $\mathscr{C}_F$ admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, en $x = \frac{1}{2}$ et en $x = \mathrm{e}$.