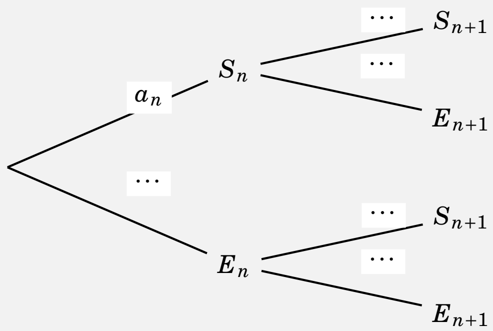
Exercice 10
Un joueur effectue plusieurs parties successives.
S'il a gagné une partie, alors la probabilité qu'il gagne la suivante vaut $\frac{2}{5}$.
S'il a perdu une partie, alors la probabilité qu'il gagne la suivante vaut $\frac{1}{5}$.
Soit S_n et E_n les événements :
S_n : "le joueur a gagné la n-ième partie"
E_n : "le joueur a perdu la n-ième partie" .
Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $a_n = P(S_n)$.

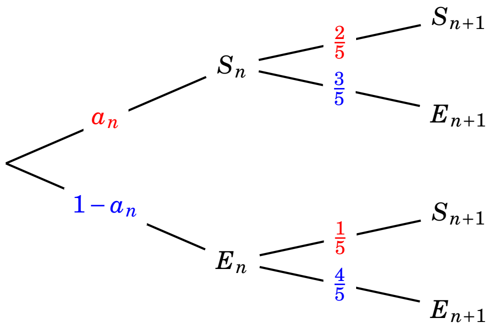
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{1}{5}$.
3. On suppose que la probabilité que le joueur gagne sa première partie vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_n \geq \frac{1}{4}$
   (b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante.
   (c) Montrer que la suite (a_n) est convergente.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
4. On suppose que la probabilité que le joueur gagne sa première partie vaut a, où a est un réel fixé de l'intervalle $[0\,;1]$. On considère la suite auxiliaire (b_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $b_n = a_n - \frac{1}{4}$
   (a) Montrer que la suite (b_n) est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme b_1 en fonction de a.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
   $$a_n = \left(a - \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$$
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
   (d) Interpréter concrètement le résultat obtenu à la question 4(c).

Correction

1. D'après l'énoncé $P(S_n) = a_n$, $P_{S_n}(S_{n+1}) = \frac{2}{5}$ et $P_{E_n}(S_{n+1}) = \frac{1}{5}$. On complète ces données sur l'arbre pondéré.



2. D'après la formule des probabilités totales on a

$$P(S_{n+1}) = P(S_n \cap S_{n+1}) + P(E_n \cap S_{n+1}) = P(S_n) \times P_{S_n}(S_{n+1}) + P(E_n) \times P_{E_n}(S_{n+1})$$

Donc :

$$a_{n+1} = P(S_{n+1}) = a_n \times \frac{2}{5} + (1 - a_n) \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}a_n + \frac{1}{5}$$

Donc, pour tout entier naturel n non nul, on a bien : $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{1}{5}$

3. (a) Pour tout entier naturel n non nul, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $a_n \geq \frac{1}{4}$.
Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\mathscr{P}_n$ est vraie.
Initialisation : On a : $a_1 = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$, donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel non nul, supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie. On a donc :

$$a_n \geq \frac{1}{4} \iff \frac{1}{5}a_n + \frac{1}{5} \geq \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{4}$$

Donc $a_{n+1} \geq \frac{1}{4}$, par conséquent $\mathscr{P}_{n+1}$est vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, $a_n \geq \frac{1}{4}$, .

(b) Soit n un entier naturel non nul. On a : $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}a_n + \frac{1}{5} - a_n = -\frac{4}{5}a_n + \frac{1}{5}$ Or, comme pour tout entier naturel n non nul, on a $a_n \geq \frac{1}{4}$, on obtient :$-\frac{4}{5}a_n + \frac{1}{5} \leq -\frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 0$, soit : $a_{n+1} - a_n \leq 0$. Donc la suite (a_n) est décroissante.

(c) La suite (a_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{4}$, elle est donc convergente.

(d) Posons : $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ (cette limite existe car (a_n) est convergente). Par passage à la limite dans l'égalité $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{1}{5}$, on obtient : $\ell = \frac{1}{5}\ell + \frac{1}{5}$, d'où $5\ell = \ell + 1$ soit $\ell = \frac{1}{4}$

4. (a) Pour tout entier naturel non nul n : $b_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{4}$. Or : $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{1}{5}$, donc : $b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$, soit : $b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n - \frac{1}{20}$ donc : $b_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n - \frac{1}{4})$ Soit : $b_{n+1} = \frac{1}{5}b_n$, donc la suite (b_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$. Son premier terme $b_1 = a_1 - \frac{1}{4} = a - \frac{1}{4}$

(b) Par conséquent : pour tout entier naturel n non nul, on a : $b_n = b_1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$. Donc : $b_n = (a - \frac{1}{4}) \times (\frac{1}{5})^{n-1}$
Et, comme $a_n = b_n + \frac{1}{4}$, on obtient :

$$a_n = \left(a - \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$$

(c) Comme $0 < \frac{1}{5} < 1$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(a - \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{4}$, on retrouve le résultat de la question 3(d).

(d) La probabilité que le joueur gagne une partie se rapproche de $\frac{1}{4}$ d'aussi près que l'on veut pourvu que le nombre de parties jouées soit suffisamment grand. Ce résultat est indépendant de la valeur de a.