Exercice 4

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

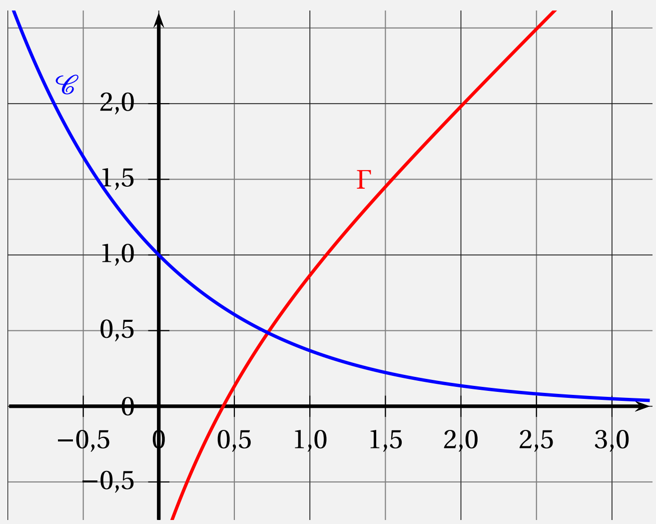
1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie II

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, on appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

La courbes $\mathscr{C}$ et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la Partie I) sont tracées ci-dessous



Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathscr{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point.

1. Pour tout nombre réel t, on note M le point de coordonnées $\left(t\,;\,\mathrm{e}^{-t}\right)$ de la courbe $\mathscr{C}$.
   On considère la fonction h qui, au nombre réel t, associe la distance OM.
   On a donc : $h(t) = \mathrm{O}M$, c'est-à-dire :

$$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$

a. Montrer que, pour tout nombre réel t,

$$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}.$$

où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

b. Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha\ ;\ \mathrm{e}^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.

Placer ce point sur le graphique ci-dessus.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.

a. Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.

On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}$.

On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :

Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1.

b. Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.

Tracer ces droites sur le graphique

Correction

Partie I

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}$

- On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{-2x} = -\infty$; donc par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
- On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$; donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. la fonction f est somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\mathrm{e}^{-2x}$, donc f est dérivable sur cet intervalle : $f'(x) = 1 - (-2)\mathrm{e}^{-2x} = 1 + 2\mathrm{e}^{-2x}$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-2x} > 0$, on alors $1 + 2\mathrm{e}^{-2x} > 1 > 0$. La dérivée f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction f est continue car et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; et comme $0 \in \mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.

$f(0) = -1$ et $f(1) \approx 0,865$, donc $0 < \alpha < 1$;

Avec la calculatrice on obtient

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
f(x)	-1	-0,718730753	-0,470320046	-0,248811636	-0,049328964	0,132120559

$f(0,4) \approx -0,05$ et $f(0,5) \approx 0,13$, donc $0,4 < \alpha < 0,5$;

x	0,4	0,41	0,42	0,43
f(x)	-0,049328964	-0,030431655	-0,011710523	0,006837918

$f(0,42) \approx -0,01$ et $f(0,43) \approx 0,007$, donc $0,42 < \alpha < 0,43$.

4. On a donc :

- sur $]-\infty\,;\,\alpha[$, $f(x) < 0$;
- sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$;
- et $f(\alpha) = 0$.

Partie II

1.

$$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$

a. Posons $u(t) = t^2 + \mathrm{e}^{-2t}$, donc $h(t) = \sqrt{u(t)}$. La fonction h est dérivable car composée de deux fonctions dérivables : $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto t^2 + \mathrm{e}^{-2t}$.

Donc $h'(t) = \dfrac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} = \dfrac{2t - 2\mathrm{e}^{-2t}}{2\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}} = \dfrac{t - \mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}} = \dfrac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}$.

b. La distance du point de la courbe $\mathscr{C}$ le plus proche de l'origine O Correspond au minimum de la fonction h.

Comme le dénominateur est strictement positif, pour déterminer le signe de de $h'(t)$ il suffit d'étudier le signe du numérateur qui est celui de $f(t)$ dont on a vu le signe dans la question 4.

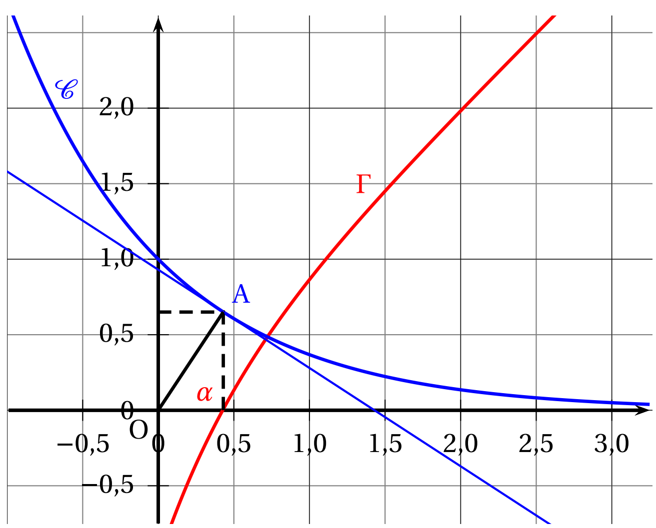
Donc :

- sur $]-\infty\,;\,\alpha[$, $f(t) < 0$ donc $h'(t) < 0$: la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle ;
- sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$ donc $h'(t) > 0$: la fonction est strictement croissante sur cet intervalle ;
- et $f(\alpha) = 0$, la dérivée h' s'annule en α en changeant de signe, donc $h(\alpha)$ est le minimum de la fonction h.

La distance OM est donc minimale pour $t = \alpha$ et l'ordonnée de M correspondante est alors $\mathrm{e}^{-\alpha}$.

Le point de la courbe le plus proche de l'origine est donc le point A$(\alpha\,;\,\mathrm{e}^{-\alpha})$.

Comme $f(\alpha) = 0, x = \alpha$ correspond l'abscisse du point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.Le point A a pour abscisse α et appartient à $\mathscr{C}$.



2. **a.** Le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse α est $m = g'(\alpha) = -\mathrm{e}^{-\alpha}$

b. D'après le rappel le coefficient directeur de la droite (OA) est $m' = \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}$ donc

$$mm' = -\mathrm{e}^{-\alpha} \times \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha} = -\frac{\mathrm{e}^{-2\alpha}}{\alpha}$$

or on sait que

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha - \mathrm{e}^{-2\alpha} = 0 \iff \alpha = \mathrm{e}^{-2\alpha} \iff \frac{\mathrm{e}^{-2\alpha}}{\alpha} = 1$$

finalement le produit des coefficients directeurs $mm' = -1$. La droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires. Voir le graphique ci-dessus