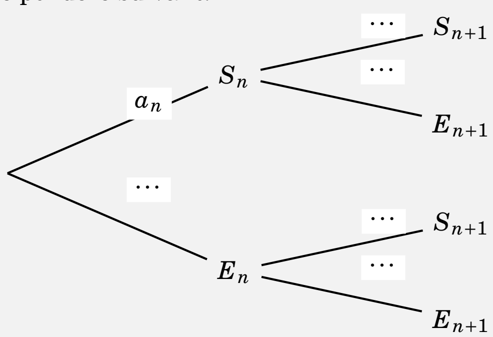
Exercice 10

Un joueur effectue plusieurs parties successives.
S'il a gagné une partie, alors la probabilité qu'il gagne la suivante vaut $\frac{2}{5}$.
S'il a perdu une partie, alors la probabilité qu'il gagne la suivante vaut $\frac{1}{5}$.
Soit S_n et E_n les événements :
S_n : "le joueur a gagné la n-ième partie"
E_n : "le joueur a perdu la n-ième partie" .
Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $a_n = P(S_n)$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{1}{5}$.
3. On suppose que la probabilité que le joueur gagne sa première partie vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_n \geq \frac{1}{4}$
   (b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante.
   (c) Montrer que la suite (a_n) est convergente.
   (d) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n$.
4. On suppose que la probabilité que le joueur gagne sa première partie vaut a, où a est un réel fixé de l'intervalle $[0;1]$. On considère la suite auxiliaire (b_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $b_n = a_n - \frac{1}{4}$
   (a) Montrer que la suite (b_n) est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme b_1 en fonction de a.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
   $$a_n = \left(a - \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$$
   (c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n$.
   (d) Interpréter concrètement le résultat obtenu à la question 4(c).