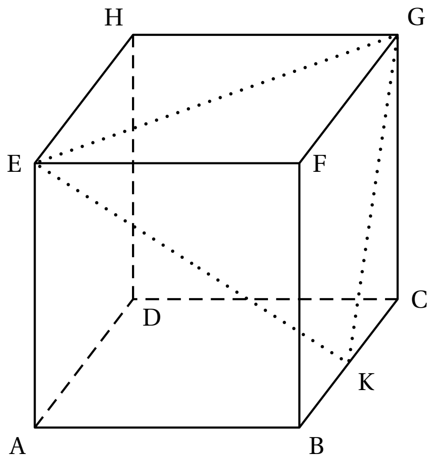
EXERCICE 3 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace**

On considère un cube ABCDEFGH et on appelle K le milieu du segment [BC].
On se place dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$ et on considère le tétraèdre EFGK.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$$

où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.



1. Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.

1) E $(0;0;1)$, F$(1,0,1)$, G$(1,1,1)$ et K$(1,\frac{1}{2},0)$.

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).

2) On considère les 2 vecteurs non colinéairs

$\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EK} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$

on a donc $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{n} = 1\times2+1\times(-2)+0\times1 = 0$

et $\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{n} = 0\times2+\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2)+(-1)\times1 = 0$

le vecteur $\overrightarrow{n}$ est perpendiculaire à 2 vecteurs non colinéairs du plan (EGK) donc c'est un vecteur normal de ce plan.

3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x-2y+z-1=0$.

3) une équation cartésienne du plan (EGK) est $2x - 2y + z + d = 0$ et comme le point $E \in (EGK)$, ses coordonnées vérifient l'équation $2x - 2y + z + d = 0$ soit

$1 + d = 0$ donc $d = -1$

on a montré que (EGK) admet pour équation cartésienne $2x - 2y + z - 1 = 0$

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (ECK) passant par F.

4- Comme $(d) \perp (EGK)$, le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (d) de plus (d) passe par le point E.

donc $(d) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t \\ z = t + 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$.

5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{7}{9}\right)$.

5)- le point L $\in (d) \cap (EGK)$ donc ses coordonnées vérifient le système

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -2t \\ z = t+1 \\ 2x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -2t \\ z = t+1 \\ 2(2t+1) - 2(-2t) + (t+1) - 1 = 0 \end{cases}$$

on trouve $\begin{cases} x = \frac{5}{9} \\ y = \frac{4}{9} \\ z = \frac{7}{9} \\ t = -\frac{2}{9} \end{cases}$

Donc le projeté orthogonal de F sur (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right)$.

6. Justifier que la longueur LF est égale à $\dfrac{2}{3}$.

6) $LF = \sqrt{(x_F - x_L)^2 + (y_F - y_L)^2 + (z_F - z_L)^2}$

$LF = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{9}\right)^2 + \left(0 - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(1 - \frac{7}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{9^2}}$

$LF = \frac{2}{3}$.

7. Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\dfrac{1}{6}$.

7) on a $EF = GF = 1$ (des arêtes du cube).
on note $\mathcal{A}_1$ l'aire du triangle EFG rectangle en F : $\mathcal{A}_1 = \dfrac{EF \times GF}{2} = \dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
le volume V du tétraèdre EFGK est $V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_1 \times BF = \frac{1}{6}$.

8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.

8) • On note A_2 l'aire du triangle EGK

• LF est la hauteur du tétraèdre EFGK relative à la base EGK

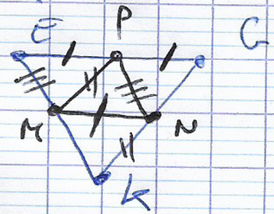
donc $V = \frac{1}{3} A_2 \times LF \iff A_2 = \frac{3V}{LF} = \frac{3 \times \frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}$

donc $A_2 = \frac{3}{4}$.

9. On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment[GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.

9) On note V' le volume de la pyramide FPMN et A' l'aire du triangle PMN.

$V' = \frac{1}{3} A' \times LF$.



Le triangle MNP est une réduction du triangle EKG de rapport $\frac{1}{2}$ donc $A' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times A_2$

$A' = \frac{1}{4} \times A_2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$.

$V' = \frac{1}{3} \times \frac{3}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{24}$.