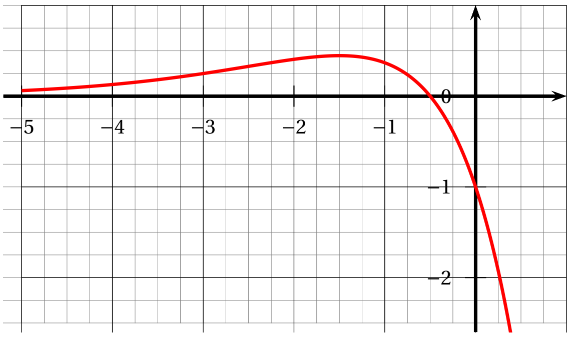
EXERCICE 2 **(7 points)** **Thèmes : fonctions numériques et suites**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Pour les questions 1 à 3 ci-dessous, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe de sa fonction dérivée f' est donnée ci-dessous.
On admet que f' admet un maximum en $-\dfrac{3}{2}$ et que sa courbe coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$.

On rappelle que la courbe ci-dessous représente la fonction dérivée f' de f.



Question 1 :

a. La fonction f admet un maximum en $-\dfrac{3}{2}$;

b. La fonction f admet un maximum en $-\dfrac{1}{2}$;

c. La fonction f admet un minimum en $-\dfrac{1}{2}$;

d. Au point d'abscisse -1, la courbe de la fonction f admet une tangente horizontale.

1) la fonction f' s'annule en $x = -\frac{1}{2}$ en changeant de signe du positif vers le négatif, donc f admet un maximum en $x = -\frac{1}{2}$.

Réponce b.

Question 2 :

a. La fonction f est convexe sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[$;

b. La fonction f est convexe sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$;

c. La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f n'admet pas de point d'inflexion ;

d. La fonction f est concave sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$.

2) la fonction f' est croissante sur $]-\infty, -\frac{3}{2}]$

donc f'' est positive sur $]-\infty, -\frac{3}{2}]$.

Par conséquent f est convexe sur cet intervalle.

Réponce a

Question 3 :
La dérivée seconde f'' de la fonction f vérifie :

a. $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in \left]-\infty\,;\, -\frac{1}{2}\right[$;

b. $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in [-2\,;\,-1]$;

c. $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$;

d. $f''(-3) = 0$.

Le nombre dérivé $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$ (la tangente à la courbe en ce point est horizontale). Réponse **c.**

3) La fonction f' admet un maximum en $x = -\frac{3}{2}$ donc $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$

Réponce c.

Question 4 :

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). On sait que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et de plus : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 3$.
On peut alors affirmer que :

a. la suite (v_n) converge ;

b. Si la suite (u_n) est croissante alors la suite (v_n) est minorée par u_0 ;

c. $1 \leqslant v_0 \leqslant 3$;

d. la suite (v_n) diverge.

Si (u_n) est croissante elle est minorée par u_0, donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_0 < u_n \leqslant v_n$, donc $u_0 \leqslant v_n$.
Réponse **b.**

4) Si la suite (u_n) est croissante alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq v_n$
donc la suite (v_n) est minorée par 0.

Réponse b.

Question 5 :

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
On peut alors affirmer que :

a. la suite (u_n) diverge ;

b. la suite (u_n) converge ;

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

La suite (u_n) est croissante et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, elle est majorée par 0 : elle converge donc vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 0$, mais on ne connait pas cette limite. Réponse **b.**

5) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n} \leq 1$ on a
$u_n \leq u_{n+1} \leq 1$,

la suite (u_n) est donc croissante et majorée donc elle converge

Réponse (b)

Question 6 :

On considère (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier naturel n, on a : $n < u_n < n+1$.
On peut affirmer que :

a. Il existe un entier naturel N tel que u_N est un entier ;

b. la suite (u_n) est croissante ;

c. la suite (u_n) est convergente ;

d. La suite (u_n) n'a pas de limite.

Au rang n : $n < u_n < n+1$;
Au rang $n+1$: $n+1 < u_{n+1} < n+2$; donc $u_n < n+1 < u_{n+1}$: la suite est croissante. Réponse **b.**

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$-n > -u_n > -n-1$$

et $$n+2 > u_{n+1} > n+1$$

donc $$2 > u_{n+1} - u_n > 0$$

La suite (u_n) est donc croissante

Réponce b.