

Correction

- Par lecture graphique : $f(1) = 4$ et la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 est horizontale donc $f'(1) = 0$.
- la fonction f est un quotient de deux fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. La fonction f est donc dérivable sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - 1(a + b \ln x)}{x^2} = \frac{b - a - b \ln x}{x^2}$$

- On a $f(1) = a$ et $f'(1) = \frac{b - a - b \ln 1}{1^2} = b - a$. Les lectures graphiques de la question 1 donnent $f(1) = a = 4$ et $f'(1) = b - a = b - 4 = 0$. Donc $b = 4$.

4.

- On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} (4 + 4 \ln x) = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.
- On a pour $x \in]0 ; +\infty[$: $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{4 \ln x}{x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$ et, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x} = 0$, donc par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- D'après la question 2. Pour $x \in]0 ; +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{-4 \ln x}{x^2}$ qui a pour signe celui de $-\ln x$.

- Si $x \in]0 ; 1]$, $\ln x \leq 0$, donc $f'(x) \geq 0$.
- Si $x \in]1 ; +\infty[$, $\ln x > 0$, donc $f'(x) < 0$.

On obtient le tableau de variation de la fonction f :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variation de f	$-\infty$	4	0

- f' est une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. f' est donc dérivable sur $]0 ; +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{-4 \times \frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (-4 \ln x)}{x^4} = \frac{-4x + 8x \ln x}{x^4} = \frac{-4 + 8 \ln x}{x^3}$$

- La courbe représentative de f admet un point d'inflexion en $I(a; f(a))$ si et seulement si sa dérivée seconde s'annule en a en changeant de signe.

$$f''(x) = 0 \iff -4 + 8 \ln x = 0 \iff -1 + 2 \ln x = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}}$$

Le signe de f'' sur $]0, +\infty[$ ne dépend que de celui de $-4 + 8 \ln x$.

- On a $-4 + 8 \ln x < 0 \iff \ln x > \frac{1}{2} \iff x > e^{\frac{1}{2}}$,
- Et $-4 + 8 \ln x \geq 0 \iff \ln x \leq \frac{1}{2} \iff x \leq e^{\frac{1}{2}}$

Ainsi f'' s'annule en changeant de signe en $a = e^{\frac{1}{2}}$.

L'ordonnée de ce point I est $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{4 + 4 \times \frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{e^{\frac{1}{2}}} = 6e^{-\frac{1}{2}}$. La courbe \mathcal{C}_f admet un unique point d'inflexion $I\left(e^{\frac{1}{2}}, 6e^{-\frac{1}{2}}\right)$.