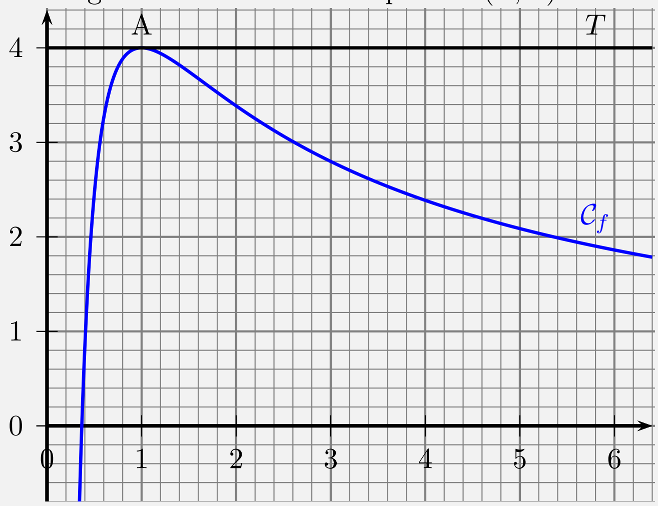
Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point $\mathrm{A}(1\,;\,4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b\,\ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8\ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

Correction

1. Par lecture graphique : $f(1) = 4$ et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est horizontale donc $f'(1) = 0$.

2. la fonction f est un quotient de deux fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. La fonction f est donc dérivable sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - 1(a + b\ln x)}{x^2} = \frac{b - a - b\ln x}{x^2}$$

3. On a $f(1) = a$ et $f'(1) = \dfrac{b - a - b\ln 1}{1^2} = b - a$. Les lectures graphiques de la question 1 donnent $f(1) = a = 4$ et $f'(1) = b - a = b - 4 = 0$. Donc $b = 4$.

4.
   - On a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (4 + 4\ln x) = -\infty$, et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
   - On a pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$: $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{4\ln x}{x}$.

   Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$ et, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4\ln x}{x} = 0$, donc par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. D'après la question 2. Pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{-4\ln x}{x^2}$ qui a pour signe celui de $-\ln x$.
   - Si $x \in]0\ ;\ 1]$, $\ln x \leq 0$, donc $f'(x) \geq 0$.
   - Si $x \in]1\ ;\ +\infty[$, $\ln x > 0$, donc $f'(x) < 0$.

   On obtient le tableau de variation de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
Variation de f	|| $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

6. f' est une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. f' est donc dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{-4 \times \frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (-4\ln x)}{x^4} = \frac{-4x + 8x\ln x}{x^4} = \frac{-4 + 8\ln x}{x^3}$$

7. La courbe représentative de f admet un point d'inflexion en $I(a; f(a))$ si et seulement si sa dérivée seconde s'annule en a en changeant de signe.

$$f''(x) = 0 \iff -4 + 8\ln x = 0 \iff -1 + 2\ln x = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}}$$

   Le signe de f'' sur $]0, +\infty[$ ne dépend que de celui de $-4 + 8\ln x$.
   - On a $-4 + 8\ln x < 0 \iff \ln x > \frac{1}{2} \iff x > e^{\frac{1}{2}}$,
   - Et $-4 + 8\ln x \geq 0 \iff \ln x \leq \frac{1}{2} \iff x \leq e^{\frac{1}{2}}$

   Ainsi f'' s'annule en changeant de signe en $a = e^{\frac{1}{2}}$.
   L'ordonnée de ce point I est $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{4 + 4 \times \frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = 6e^{-\frac{1}{2}}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion $I(e^{\frac{1}{2}}, 6e^{-\frac{1}{2}})$.