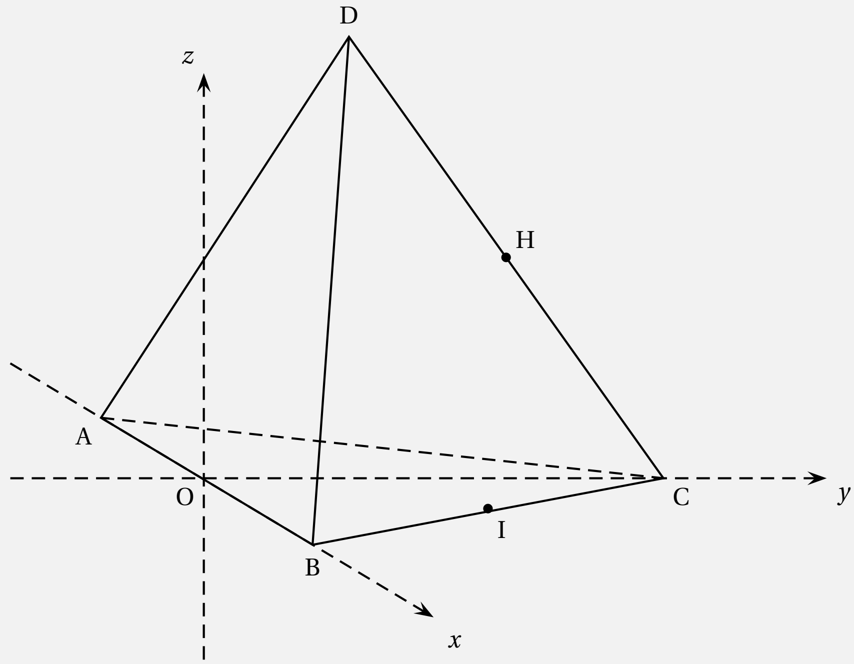
Exercice 10

On se place dans un repère orthonormé d'origine O et d'axes (Ox), (Oy) et (Oz).
Dans ce repère, on donne les points A$(-3\,;\,0\,;\,0)$, B$(3\,;\,0\,;\,0)$, C$\left(0\,;\,3\sqrt{3}\,;\,0\right)$ et D$\left(0\,;\,\sqrt{3}\,;\,2\sqrt{6}\right)$.
On note H le milieu du segment [CD] et I le milieu du segment [BC].



1. Calculer les longueurs AB et AD.

On admet pour la suite que toutes les arêtes du solide ABCD ont la même longueur, c'est-à -dire que le tétraèdre ABCD est un tétraèdre régulier.
On appelle $\mathscr{P}$ le plan de vecteur normal $\overrightarrow{\text{OH}}$ et passant par le point I.

2. Étude de la section du tétraèdre ABCD par le plan $\mathscr{P}$
   - **a.** Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $2y\sqrt{3}+z\sqrt{6}-9=0$.
   - **b.** Démontrer que le milieu J de [BD] est le point d'intersection de la droite (BD) et du plan $\mathscr{P}$.
   - **c.** Donner une représentation paramétrique de la droite (AD), puis démontrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AD) sont sécants en un point K dont on déterminera les coordonnées.
   - **d.** Démontrer que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.
   - **e.** Déterminer précisément la nature de la section du tétraèdre ABCD par le plan $\mathscr{P}$.
3. Peut-on placer un point M sur l'arête [BD] tel que le triangle OIM soit rectangle en M ?