Correction

1. **a.** L'espace est menu d'un repère orthonormé donc le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$ est donné par :

$$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = -1\times 4+1\times 7-3\times 1=0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en A.

b. On a $\overrightarrow{\text{BA}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}} = 5-6+12=11$ et les longueurs $BA=\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{11}$ et $BC=\sqrt{5^2+6^2+4^2}=\sqrt{77}$

c. Pour calculer la mesure de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$, on exprime le produit scalaire $\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}}$ de deux façons différentes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}} = \text{BA}\times\text{BC}\times\cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right) &\Leftrightarrow 11=\sqrt{11}\times\sqrt{77}\times\cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\Leftrightarrow 11=\sqrt{11}\times\sqrt{11}\times\sqrt{7}\times\cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)=\frac{1}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

À l'aide de la calculatrice on obtient $\widehat{\text{ABC}}\approx 68°$ au degré près.

2. **a.** Un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires car ABC est un triangle rectangle.
De plus

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 2\times(-1)-1\times 1-1\times(-3)=-2-1+3=0$$

et

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 2\times 4-1\times 7-1\times 1=8-7-1=0$$

$\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), c'est donc un vecteur normal de ce plan et du plan $\mathscr{P}$. Le plan $\mathscr{P}$ et (ABC) sont donc parallèles.

b. Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $2x-y-z+d=0$. Le point B appartient à ce plan, on a donc

$$2\times 1+3+d=0 \iff d=-5$$

Une équation du plan (ABC) est donc

$$2x-y-z-5=0$$

c. La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
De plus $\mathscr{D}$ passe par le point E. On a donc

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{D} \iff \overrightarrow{\text{EM}}=t\overrightarrow{n},\ \text{avec}\ t\in\mathbb{R}$$

soit

$$\left\{\begin{array}{rcl}x-1&=&2t\\y-2&=&-t,\quad t\in\mathbb{R}\\z-4&=&-t\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&1+2t\\y&=&2-t,\quad t\in\mathbb{R}\\z&=&4-t\end{array}\right.$$

d. le point H est l'intersection du plan (ABC) avec la droite $\mathscr{D}$, les coordonnées de H vérifient donc les équations du système suivant :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 2x-y-z-5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 2(1+2t)-(2-t)-(4-t)-5=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 6t-9=0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ x = 4 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

3. L'aire $\mathscr{B}$ du triangle rectangle ABC est donnée par $\mathscr{B} = \dfrac{\text{AB} \times \text{AC}}{2}$ avec $AC = \sqrt{4^2+7^2+1^2} = \sqrt{66}$ et donc

$$\mathscr{B} = \frac{\sqrt{11} \times \sqrt{66}}{2} = \frac{11\sqrt{6}}{2}$$

h=HE est la hauteur de la pyramide. On a $\overrightarrow{\text{HE}} \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

On calcule la longueur h= HE $= \sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{2}}$, Finalement on calcule le volume $\mathscr{V}$ de la pyramide ABCE

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{B}h = \frac{1}{3} \times \frac{11\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{\frac{27}{2}} = 16,5 \text{ unités de volume}$$