**Exercice 11 (durée 1heure 20 minutes)** **7 points**

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout entier naturel $n$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & v_0 = 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + v_n \end{array}\right.$$

Dans cet exercice, on **admet** que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ **sont strictement positives**.

**1.** **a.** Calculez $u_1$ et $v_1$.

**b.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel $n$, $v_n \geqslant 1$.

**c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n \geqslant n+1$.

**d.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**2.** **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ :

$$2u_n^2 - v_n^2 = (-1)^n$$

**b.** On pose, pour tout entier naturel $n$ :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

Calculer $r_n^2 - 2$ en fonction de $n$ et $u_n$ et en déduire que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

**3.** **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}.$$

**b.** En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

**c.** Déterminer la limite de la suite $\left(r_n^2\right)$ et en déduire que $(r_n)$ converge vers $\sqrt{2}$.

**d.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$,

$$r_{n+1} = \frac{2+r_n}{1+r_n}.$$

**e.** On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
      r = (2+r)/(1+r)
      n = n+1
    return n
```

(abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et 10** (-4) représente $10^{-4}$).
La valeur de $n$ renvoyée par ce programme est 5.
À quoi correspond-elle?