Correction

1. On considère la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = xln(x)x + 1$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout x réel strictement positif, on a :

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln(x) + \frac{x}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$$

Réponse a.

2. On a $g(x) = x^2 - x^2 \ln(x)$.
$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ et d'après le cours $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln(x) = 0$ (croissances comparées).
Donc par somme de limites $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

Réponse c.

3. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\left(x^2 - 0,9x - 0,1\right)$.
On a donc $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 - 0,9x - 0,1 = 0$
$x_0 = 0$ est donc une solution et pour l'équation du second degré $\Delta = 0,121 = 0,11^2 > 0$, elle admet donc deux solutions : $x_1 = -0,1$ et$x_2 = 1$.
L'équation $f(x) = 0$ a donc trois solutions : $-0,1$; 0 et 1.

Réponse d.

4. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $K(x) = \dfrac{1}{2}H(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables.
Et comme H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$ on alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ K'(x) = \frac{1}{2} \times 2H'(2x) = H'(2x) = h(2x)$$

Donc on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ K'(x) = k(x)$$

On en déduit donc que K est une primitive de k sur $\mathbb{R}$.

Réponse c.

5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions dérivables sur cet ensemble.
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 \times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^x = (1 + x)\mathrm{e}^x$.
On a donc $f'(1) = (1 + 1)\mathrm{e}^1 = 2\mathrm{e}$ et $f(1) = 1 \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est donc :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2\mathrm{e}(x - 1) + \mathrm{e} = 2\mathrm{e}x + 2\mathrm{e} - \mathrm{e} = 2\mathrm{e}x - \mathrm{e}$$

Réponse b.

$$\begin{aligned}(0,2)^n < 0,001 &\iff \ln\left(0,2^n\right) < \ln(0,001)\\ &\iff n\ln(0,02) < \ln(0,001)\\ &\iff n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)} \qquad \text{car } \ln(0,2) < 0\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)} \approx 4,3$, donc les solutions de cette inéquation sont les entiers naturels n tels que $n \geq 5$.

6. **Réponse d.**