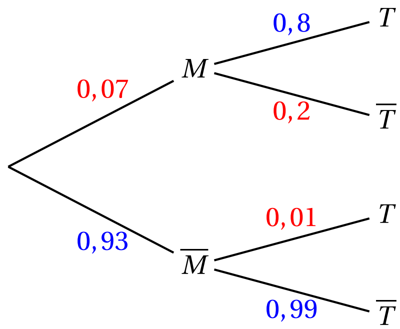
Correction

1. D'après l'énoncé on a $P(M) = 0,07$, $P_M(\overline{T}) = 0,2$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$.
On complète les donnée sur l'arbre pondéré suivant :



On a donc $P(M \cap T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$

2. Comme M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers, on peut utiliser la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,01 = 0,0653$$

3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, il est plus pertinent de calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif $P_T(M)$.

4. On cherche donc $P_T(M)$. La formule des probabilités conditionnelles donne :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,07 \times 0,8}{0,0653} \approx 0,86$$

5. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

a. Le choix de la personne dans la population étant assimilé à un tirage avec remise, on a une indépendance des 10 tirages, le succès étant défini par le test est positif, on peut assimiler cette variable aléatoire à une loi de Bernoulli de paramètre $n = 10$ et $p = 0,0653$

b. On cherche $P(X = 2)$,

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^8 \approx 0,11$$

6. Soit n le nombre de personnes testées, on cherche $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.
On sait que $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$ avec $P(X = 0) = 0,9347^n$ on a donc les équivalences suivantes :

$$1 - 0,9347^n \geqslant 0,99 \iff 0,9347^n \leq 0,01 \iff n \ln(0,9347) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \frac{\ln(0,01}{\ln(0,9347} \iff n \geqslant 68,19$$

il faut donc tester au minimum 69 personnes dans ce pays pour qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif.