Exercice 12

∽ Baccalauréat Polynésie 5 mai 2022 ∾

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ sujet n° 1

EXERCICE 2 (durée 1heure 20 min) 7 points **Thèmes : probabilités**

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.
Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

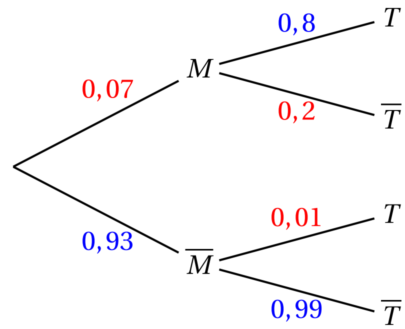
Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.
On considère les évènements suivants :

- M « la personne est malade » ;
- T « le test est positif ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, et de 0,065 3.
3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaÃőtre $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?
4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.
   Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
5. On choisit des personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.
   a. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
   b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elle ait un test positif, soit supérieur à 99 %.

Correction

1. D'après l'énoncé on a $P(M) = 0,07$, $P_M(\overline{T}) = 0,2$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$.
On complète les donnée sur l'arbre pondéré suivant :



On a donc $P(M \cap T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$

2. Comme M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers, on peut utiliser la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,01 = 0,0653$$

3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, il est plus pertinent de calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif $P_T(M)$.

4. On cherche donc $P_T(M)$. La formule des probabilités conditionnelles donne :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,07 \times 0,8}{0,0653} \approx 0,86$$

5. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

- **a.** Le choix de la personne dans la population étant assimilé à un tirage avec remise, on a une indépendance des 10 tirages, le succès étant défini par le test est positif, on peut assimiler cette variable aléatoire à une loi de Bernoulli de paramètre $n = 10$ et $p = 0,0653$
- **b.** On cherche $P(X = 2)$,

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^8 \approx 0,11$$

6. Soit n le nombre de personnes testées, on cherche $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.
On sait que $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$ avec $P(X = 0) = 0,9347^n$ on a donc les équivalences suivantes :

$$1 - 0,9347^n \geqslant 0,99 \iff 0,9347^n \leq 0,01 \iff n\ln(0,9347) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \frac{\ln(0,01}{\ln(0,9347} \iff n \geqslant 68,19$$

il faut donc tester au minimum 69 personnes dans ce pays pour qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif.