Correction

1. **a.** $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{1}{3}$ et $u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{1}{4}$.

b.

```
def liste(k) :
    L = []
    u =1
    for i in range(0, k+1) :
        L.append(u)
        u =u/(1+u)
    return(L)
```

2. Pour tout entier naturel n,on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{-u_n^2}{1+u_n}$$

Comme pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif on a alors :

$$\frac{-u_n^2}{1+u_n} < 0$$

Par conséquent $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc La suite (u_n) est strictement décroissante.

3. Comme (u_n) est décroissante est minorée par 0, elle est convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

4. La suite (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. la limite ℓ vérifie donc l'égalité $f(\ell) = \ell$. La résolution de cette équation donne :

$$\frac{\ell}{1+\ell} = \ell \Leftrightarrow \ell(1+\ell) - \ell = 0 \Leftrightarrow \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$$

5. **a.** Les premiers termes de la suite (u_n) sont : $\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots$, on peut conjecturer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \frac{1}{n+1}$$

b. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété :$u_n = \dfrac{1}{n+1}$. On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

- Initialisation :

pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

- Hérédité :

Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

On a alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+1+1}{n+1}} = \dfrac{1}{1+(n+1)}$: $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

- Conclusion :

Comme $\mathscr{P}_0$ est vraie, et que pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ vraie implique $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie, d'après le principe de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.