Correction

1. (a) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est la fonction $x \longmapsto \ln(x)$.
   La fonction $x \mapsto 2x^2$ a pour primitive $x \mapsto \frac{2}{3}x^3$.
   Pour déterminer une primitive de $x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2}$, on pose $u(x) = x^2$ donc $u'(x) = 2x$.
   On a alors: $x\mathrm{e}^{x^2} = \frac{1}{2}u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.La fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2}$ admet pour primitive $x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$.
   Par conséquent la fonction $x \mapsto \ln(x) + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Les primitives de f sont les fonctions: $x \mapsto \ln(x) + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C$, avec C une constante réelle.

   (c) $F(1) = 0 \iff \ln(1) + \frac{2}{3} \times 1^3 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{1^2} + C = 0 \iff C = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\mathrm{e}$. La primitive de f qui s'annule pour $x = 1$ est la fonction $x \mapsto \ln(x) + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\mathrm{e}$

2. On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :$f(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$ et $F(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

   (a) La fonction F est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas, F est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$. On obtient alors:

   $$F'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{1-\ln(x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = f(x)$$

   On a vérifié que $F' = f$ sur $\mathbb{R}_+^*$, F est donc une primitive de f.

   (b) Les primitives de f sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $G(x) = \frac{\ln(x)}{x} + C$, avec C une constante réelle.

   (c) $G(1) = 1 \iff \frac{\ln(1)}{1} + C = 1 \iff C = 1$. La primitive de f qui vaut 1 en $x = 1$ est la fonction : $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} + 1$.