

Exercice 2

- On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par: $f(x) = \frac{1}{x} + 2x^2 + xe^{x^2}$
 - Déterminer une primitive de la fonction f ;
 - puis les primitives de f ;
 - et enfin la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.
- On considère les fonctions f et F définies sur \mathbb{R}_+^* par : $f(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$ et $F(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
 - Vérifier que F est une primitive de f .
 - Déterminer toutes les primitives de f .
 - Déterminer la primitive de f qui prend la valeur 1 en 1.

Correction

- Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la fonction $x \mapsto \ln(x)$.
La fonction $x \mapsto 2x^2$ a pour primitive $x \mapsto \frac{2}{3}x^3$.
Pour déterminer une primitive de $x \mapsto xe^{x^2}$, on pose $u(x) = x^2$ donc $u'(x) = 2x$.
On a alors: $xe^{x^2} = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$. La fonction $x \mapsto xe^{x^2}$ admet pour primitive $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$.
Par conséquent la fonction $x \mapsto \ln(x) + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive de f sur \mathbb{R}_+^* .
 - Les primitives de f sont les fonctions: $x \mapsto \ln(x) + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}e^{x^2} + C$, avec C une constante réelle.
 - $F(1) = 0 \iff \ln(1) + \frac{2}{3} \times 1^3 + \frac{1}{2}e^{1^2} + C = 0 \iff C = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}e$. La primitive de f qui s'annule pour $x = 1$ est la fonction $x \mapsto \ln(x) + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e$
- On considère les fonctions f et F définies sur \mathbb{R}_+^* par : $f(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$ et $F(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
 - La fonction F est un quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* dont le dénominateur ne s'annule pas, F est donc dérivable sur \mathbb{R}_+^* . On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$. On obtient alors:
$$F'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = f(x)$$
On a vérifié que $F' = f$ sur \mathbb{R}_+^* , F est donc une primitive de f .
 - Les primitives de f sont les fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* par : $G(x) = \frac{\ln(x)}{x} + C$, avec C une constante réelle.
 - $G(1) = 1 \iff \frac{\ln(1)}{1} + C = 1 \iff C = 1$. La primitive de f qui vaut 1 en $x = 1$ est la fonction : $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} + 1$.