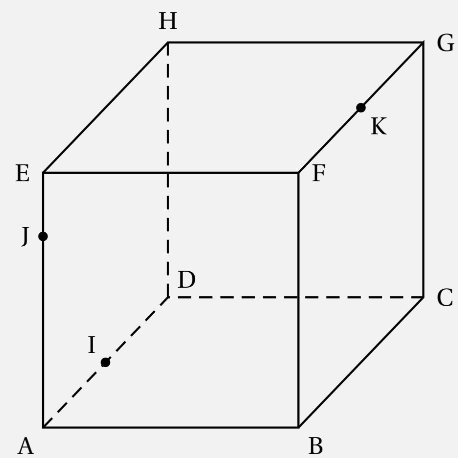
Exercice 8



La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

— I est le milieu du segment [AD] ;

— J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AE}$;

— K est le milieu du segment [FG].

Partie A

1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.

2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).

Partie B

On se place désormais dans le repère orthonormé $\left(A~;~\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a.** Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

b. Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\overrightarrow{n}(4~;~a~;~b)$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $4x - 6y - 4z + 3 = 0$.

2. **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).

b. Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).

c. Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK).

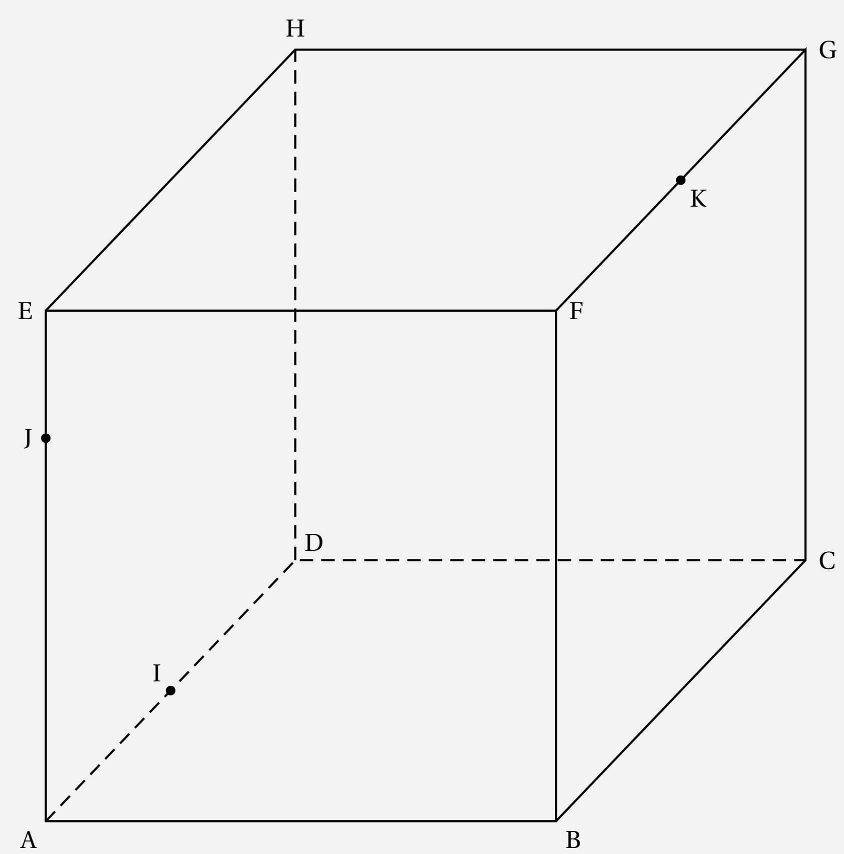
Partie C

On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). Le point R est donc l'unique point du plan (IJK) tel que la droite (FR) est orthogonale au plan (IJK).

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x~;~y~;~z)$ tels que $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$

Le point R est-il à l'intérieur du cube ?

Annexe (à rendre avec la copie)



Correcttion

Partie A

1. Construction du point P, intersection du plan (IJK) et de la droite (EH) : voir l'annexe.
2. Les points K et P appartiennent aux plans (IJK) et (EFG). La droite (KP) est donc incluses dans les deux plans. Comme ces deux plans ne sont pas parallèles, leur intersection est une droite qui est donc la droite (KP).

Partie B

Dans le repère orthonormé $\left(A~;~\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$,On a A $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, D $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et E $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. On a aussi C $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, F $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, H $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et G $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. **a.**
   - Le point I est le milieu de [AD] donc I a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0,5\\0\end{pmatrix}$.
   - Le point J est défini par $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; donc le point J a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\0,75\end{pmatrix}$.
   - Le point K est le milieu de [FG] donc K a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0,5\\1\end{pmatrix}$.

   b. On a $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\a\\b\end{pmatrix}$, $\vec{IJ}\begin{pmatrix}0\\-0,5\\0,75\end{pmatrix}$ et $\vec{IK}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. $\vec{n}$ orthogonal aux vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ si et seulement si $\vec{n}.\vec{IJ} = 0$ et $\vec{n}.\vec{IK} = 0$ donc

   $$\begin{cases}-0,5a+0,75b=0\\4+b=0\end{cases} \iff \begin{cases}b=-4\\-0,5a-0,75\times 4=0\end{cases} \iff \begin{cases}b=-4\\a=-6\end{cases}$$

   Ainsi le vecteur $\vec{n}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}4\\-6\\-4\end{pmatrix}$,

   c. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ donc c'est un vecteur normal au plan (IJK). Ce plan (IJK) contient le point I.
   Le plan (IJK) est donc l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{IM}$ soient orthogonaux.
   Le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-0\\y-0,5\\z-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y-0,5\\z\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{IM} \iff \overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{IM} = 0 \iff 4x-6\left(y-\dfrac{1}{2}\right)-4z=0 \iff 4x-6y-4z+3=0$
   Le plan (IJK) a donc pour équation cartésienne $4x-6y-4z+3=0$.

2. **a.** La droite (CG) passe par le point C et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{CG}}$ égal au vecteur $\overrightarrow{\text{AE}}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

La droite (CG) est donc l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $\overrightarrow{\text{CM}}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{\text{CG}}$, ce qui s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{CM}} = t\overrightarrow{\text{CG}} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 0\\ y-1 &=& 0\\ z-0 &=& t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& 1\\ z &=& t\end{array}\right. \text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

La droite (CG) a donc pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& 1\\ z &=& t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$.

b. Les coordonnées (x, y, z) du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG) vérifient le système $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& 1\\ z &=& t\\ 4x-6y-4z+3 &=& 0\end{array}\right.$

La quatrième équation du système donne $4-6-4t+3=0$ ce qui implique que $t=\dfrac{1}{4}=0,25$.

La point N a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0,25\end{pmatrix}$.

c. Voir l'annexe pour le placement du point N et construction de la section du cube par le plan (IJK).

Partie C

La droite (FR) est orthogonale au plan (IJK). Le vecteur $\vec{n}$ est donc un vecteur directeur de cette droite. Le point $F(1;0;1)$ appartient à cette droite. Une représentation paramétrique de la droite (FR) est $\left\{\begin{array}{l} x=1+4t\\ y=-6t\\ z=1-4t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$. Les coordonnées du point R sont solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+4t\\ y=-6t\\ z=1-4t\\ 4x-6y-4z+3=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=1+4t\\ y=-6t\\ z=1-4t\\ 4+16t+36t-4+16t+3=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=1+4t\\ y=-6t\\ z=1-4t\\ 68t+3=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=1+4t\\ y=-6t\\ z=1-4t\\ t=-\dfrac{3}{68}\end{array}\right.$$

On remplace $t=-\dfrac{3}{68}$ dans les trois premières équations du système on obtient $\left\{\begin{array}{l} x_R=\dfrac{14}{17}\\ y_R=\dfrac{9}{34}\\ z_R=\dfrac{20}{17}\\ t=-\dfrac{3}{68}\end{array}\right.$

$z_R=\dfrac{20}{17}\geq 1$, donc le point R nest pas à lintérieur du cube.

Annexe (à rendre avec la copie)