Exercice 8

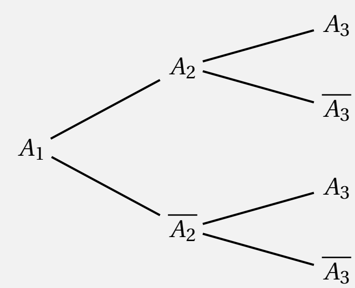
Un détaillant en fruits et légumes réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

— parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;

— parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. **a.** Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.



b. Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.

c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?
Arrondir au centième.

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.

b. Démontrer que la suite $\left(p_n\right)$ est décroissante.

c. La suite $\left(p_n\right)$ est-elle convergente ?

4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$.

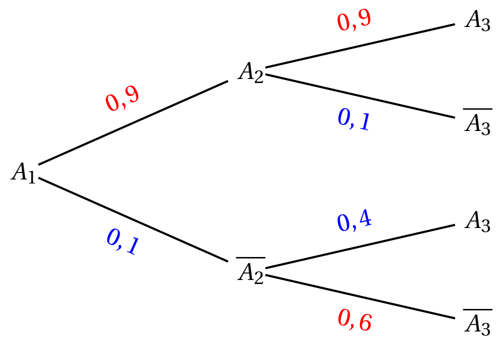
a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

c. Déterminer la limite de la suite $\left(p_n\right)$.

Correction

1. **a.** D'après l'énoncé de l'exercice, on a a $P(A_2) = 0.9$, $P_{A_2}(A_3) = 0.9$ et $P_{\overline{A_2}}(\overline{A_3}) = 0.6$. On complète l'arbre de probabilités relatif aux trois premières semaines.



b. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_3) = P(A_2 \cap A_3) + P\left(\overline{A_2} \cap A_3\right) = P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P\left(\overline{A_2}\right) \times P_{\overline{A_2}}(A_3)$$

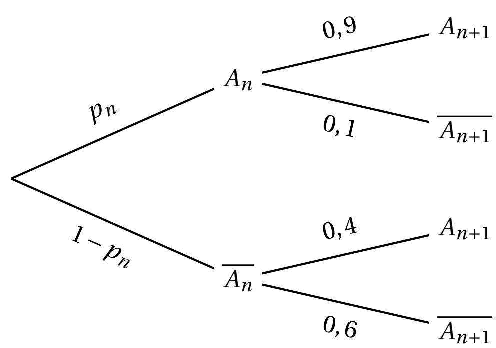
Soit

$$P(A_3) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = 0,81 + 0,04 = 0,85$$

c. On cherche $P_{A_3}(A_2)$, on utilise alors la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{0,9 \times 0,9}{0,85} \approx 0,95$$

2. On représente un arbre pondéré correspondant aux semaines n et $n+1$:



D'après la formule des probabilités totales :

$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) = p_n \times 0,9 + \left(1 - p_n\right) \times 0,4 = 0,5p_n + 0,4.$

3. **a.** Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $p_n > 0,8$.

Initialisation : On sait que $p_1 = 1$ donc $p_1 > 0,8$; la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier naturel $n \geqslant 1$ tel que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à -dire $p_n > 0,8$. C'est l'hypothèse de récurrence.

On va démontrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$,est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, $p_n > 0,8$ donc $0,5p_n + 0,4 > 0,8$ on en déduit que $p_{n+1} > 0,8$. La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$. On a donc démontré que, pour tout entier naturel non nul, $p_n > 0,8$.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n = 0,5p_n + 0,4 - p_n = 0,4 - 0,5p_n$.

Or $p_n > 0,8$ en multipliant les deux membres de cette inégalité par $-0,5$ et en ajoutant $0,4$ on obtient $0,4 - 0,5p_n < 0$.

Autrement dit, pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n < 0$ et donc que la suite (p_n) est strictement décroissante.

c. Pour tout $n \geqslant 1$, $p_n > 0,8$ donc la suite (p_n) est minorée par $0,8$. De plus la suite (p_n) est décroissante. Donc d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (p_n) est convergente.

4. **a.** Pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$ donc $p_n = v_n + 0,8$.

- $v_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = 0,5p_n + 0,4 - 0,8 = 0,5(v_n + 0,8) - 0,4 = 0,5v_n + 0,4 - 0,4 = 0,5v_n$
- $v_1 = p_1 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$

Conclusion : la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = 0,2$.

b. Le terme général de la suite (v_n) est donné par la formule $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ avec $n \geqslant 1$, On en déduit que

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n = 0,2 \times 0,5^{n-1}$$

.

Comme pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = v_n + 0,8$, on en déduit que

$$p_n = 0,2 \times 0,5^{n-1} + 0,8$$

c. La suite (v_n) est géométrique de raison $0,5$ et $-1 < 0,5 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente vers 0. Pour tout $n > 0$, $p_n = v_n + 0,8$ donc par somme des limites, la suite (p_n) est convergente vers $0,8$.