Exercice 9

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

— la formation avec *conduite accompagnée*;

— la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

— 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée*; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.

— 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle*; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.
On considère les évènements suivants :

A : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* »;

R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation »;

R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation »;

R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.
Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.

2. **a.** Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation.

b. Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.

c. La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée*?

3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.
Ainsi, $X = 1$ correspond à l'évènement R_1.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.
On admet que la probabilité de l'évènement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.

a. Dans le contexte de cette question, préciser un évènement dont la probabilité est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

On considère la fonction Python **seuil** ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$.

```
def seuil(p) :
    n = 1
    while 1-(5/6)**n <= p :
        n = n+1
    return n
```

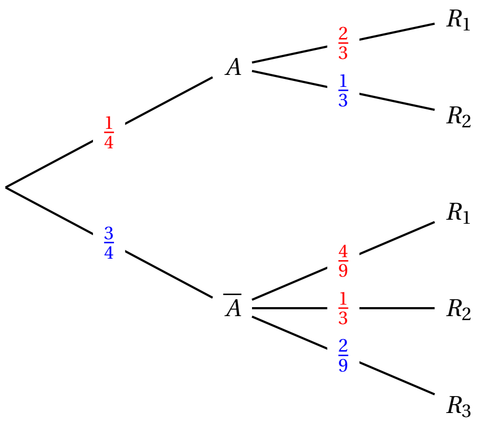
b. Quelle est la valeur renvoyée par la commande **seuil**(0,9) ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Correction

1. On calcul les probabilités en utilisant l'énoncé :

$$P(A) = \frac{75}{300} = \frac{1}{4}, \qquad P_A(R_1) = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}, \quad P_{\overline{A}}(R_1) = \frac{100}{225} = \frac{4}{9}, \qquad P_{\overline{A}}(R_2) = \frac{75}{225} = \frac{1}{3}$$

On modélise la situation par l'arbre pondéré suivant :



2. **a.** $P(A \cap R_2) = P(A) \times P_A(R_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

b. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R_2) = P(A \cap R_2) + P\left(\overline{A} \cap R_2\right) = \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

c. On utilise la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_{R_2}(A) = \frac{P(A \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

3. La variable aléatoire X peut prendre trois valeurs : $\{X = 1\}$ correspond à l'évènement R_1, $\{X = 2\}$ correspond à l'évènement R_2 et $\{X = 3\}$ correspond à l'évènement R_3.

a. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

- $P(X = 1) = P(R_1) = P(A \cap R_1) + P\left(\overline{A} \cap R_1\right) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{2}$.
- $P(X = 2) = P(R_2) = \frac{1}{3}$ (question 2-b.)
- $P(X = 2) = P(R_3) = P\left(\overline{A} \cap R_3\right) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{225} = \frac{50}{300} = \frac{1}{6}$ (dernier chemin de l'arbre pondéré).

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

k	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

b. L'espérance de cette variable aléatoire est : $E(X) = \sum k \times P(X = k) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \approx 1,67$.
Cela veut dire qu'en moyenne, un candidat se présentera 1,67 à l'examen jusqu'à sa réussite.

4. **a.** On note Y La variable aléatoire qui compte le nombre de personne parmi les n choisies qui sont des "R_3". Y prend les valeurs entre 0 et n. On répète n fois de façon identique et indépendante, l'expérience qui consiste à choisir une personne. Deux issues sont possibles, la personne est "R_3 ou "$\overline{R_3}$".
Donc Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = P(R_3) = \frac{1}{6}$. On sait que $P(Y = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
L'évènement contraire à $\{Y = 0\}$ est $\{Y \geq 1\}$ donc $P(Y \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
La valeur $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ est la probabilité de l'évènement « au moins une personne a réussi l'examen à la troisième tentative ».

b. La valeur renvoyée par **seuil**(0.9) est la première valeur de n pour laquelle $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9$.
On considère le tableau de valeurs suivant :

n	1	2	3	4	$\cdots$	12	13
$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$	0.17	0.30	0.42	0.52	$\cdots$	0.89	0.91

Donc l'instruction **seuil**(0.9) renvoie la valeur 13.

On peut aussi procéder autrement en résolvant l'inéquation $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9.$:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9 \iff 0,1 > \left(\frac{5}{6}\right)^n \iff \ln(0,1) > \ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \iff \ln(0,1) > n\ln\left(\frac{5}{6}\right) \iff n > \frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

Or $\dfrac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 12,6$. Par conséquent il faut prendre $n = 13$ personnes sur les les 300 du groupe étudié pour que la probabilité d'en avoir une qui a réussi l'examen à sa troisième tentative soit strictement supérieure à $0,9$.