

Exercice 3.7

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} .

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.

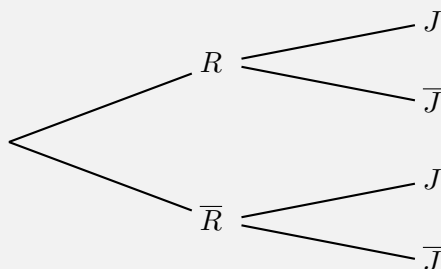
Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans. (Source : TNS-Sofres)

Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopiez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.



2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.
3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.
Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.

La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.

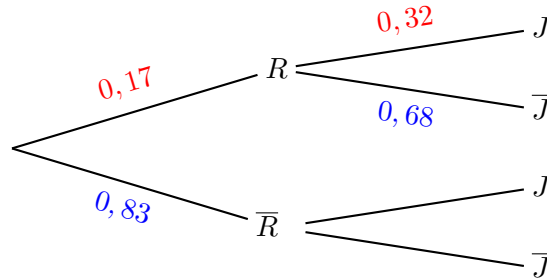
Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.
2. Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.
3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.
4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

Correction

Partie A

1. D'après l'énoncé $P(I) = 0,17$ et $P_R(J) = 0,32$. On complète ces données sur l'arbre pondéré suivant :



2. La probabilité $P(R \cap J)$ est donnée par le premier chemin de l'arbre :

$$P(R \cap J) = 0,17 \times 0,32 = 0,0544 \approx 0,054$$

3. On cherche $P(\bar{R} \cap J)$, on utilise la formule des probabilités totales :

$$P(J) = P(R \cap J) + P(\bar{R} \cap J) \text{ donc } P(\bar{R} \cap J) = P(J) - P(R \cap J) = 0,11 - 0,0544 = 0,0556$$

soit $P(J) \approx 0,056$ à 10^{-3} près.

4. On cherche $P_{\bar{R}}(J)$, on utilise alors la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_{\bar{R}}(J) = \frac{P(\bar{R} \cap J)}{P(\bar{R})} = \frac{0,056}{0,83} \approx 0,0675$$

Le pourcentage de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est donc d'environ 6,75 %.

Partie B

1. La personne interrogée au hasard, soit elle utilise régulièrement les transports en commun, avec une probabilité $p = 0,17$, soit elle n'utilise pas régulièrement les transports en commun, avec une probabilité de $1 - p = 0,83$. De plus on réalise $n = 50$ fois ce questionnaire de façon identique. Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,17$.

$$2. P(X = 5) = \binom{50}{5} \times 0,17^5 \times (1 - 0,17)^{50-5} \approx 0,069$$

Il y a donc une probabilité de 0,069 que, sur 50 personnes interrogées, exactement 5 prennent régulièrement les transports en commun.

3. Le recenseur indique que $P(X < 13) \geq 0,95$.

Or $P(X < 13) = P(X \leq 12) \approx 0,929 < 0,95$ donc l'affirmation du recenseur est fausse.

4. Le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées est donnée par l'espérance de la variable aléatoire X donc d'après le cours $E(X) = np = 50 \times 0,17 = 8,5$.