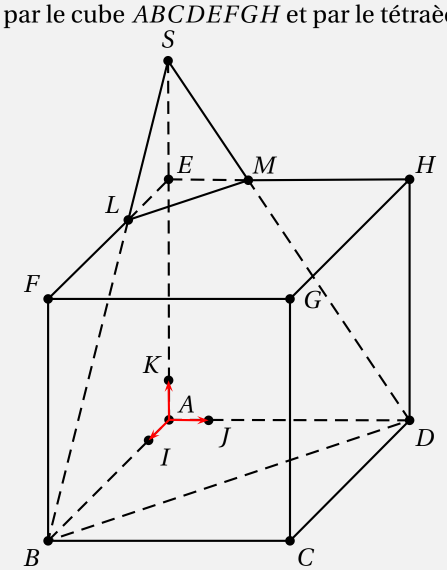
Exercice 9

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.
Ces deux solides sont représentés par le cube $ABCDEFGH$ et par le tétraèdre $SELM$ ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$ tel que : $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

— L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$;

— M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;

— S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2\,;\,0\,;\,6)$.

3. **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).

b. Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0\,;\,0\,;\,9)$.

4. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;\,3\,;\,2)$.

a. Vérifier que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (BDL).

b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est :

$$3x + 3y + 2z - 18 = 0.$$

c. On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & s \quad (s \in \mathbb{R}) \\ z & = & 6 \end{array}\right.$$

Calculer les coordonnées du point M.

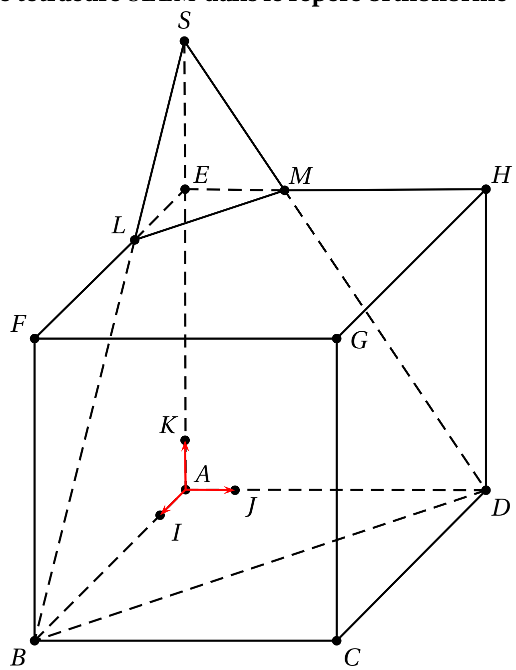
5. Calculer le volume du tétraèdre $SELM$. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}.$$

6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55°et 60°.
Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

Correction

Le cube $ABCDEFGH$ **et le tétraèdre** $SELM$ **dans le repère orthonormé** $\left(A;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AK}\right)$.



1.
- Les droites (LM) et (BD) sont contenues dans le plan (BDS) donc elles sont **coplanaires**.
- La droite (LM) est contenue dans le plan (EFH) et La droite (BD) est contenue dans le plan (ABD).
- Les plans (EFH) et (ABD) sont **parallèles** donc les droites (LM) et (BD) ne se coupent pas.

Les droites (LM) et (BD) sont **coplanaires** et ne sont pas **sécantes** donc elles sont **parallèles**.

2. Dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AK}\right)$ les coordonnées des points E, et L sont respectivement : $E(0;0;6)$, $F(6;0;6)$ et $L(x;y;z)$. On a alors :

$$\overrightarrow{FL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FE} \iff \begin{pmatrix}x-6\\y-0\\z-6\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x-6=-4\\y=0\\z-6=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=2\\y=0\\z=6\end{cases}$$

Les coordonnées du point L sont bien $(2;0;6)$.

3. a. La droite (BL) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}$ et contient le point $B(6\,;\,0\,;\,0)$.

Une représentation paramétrique de la droite (BL) est alors : $\begin{cases}x=6-4t\\y=0\\z=6t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

b. La droite (AE) contient le point $A(0,0,0)$ et elle est parallèle au vecteur $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Une représentation paramétrique de la droite (AE) est : $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t'\end{cases}$, $t'\in\mathbb{R}$.

Le point S est l'intersection des droites (BL) et (AE), donc ses coordonnées vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}x=6-4t=0\\y=0\\z=6t=t'\end{cases}$$

La première équation du système donne $t=\frac{3}{2}$ et la dernière équation donne $t'=6t=6\times\frac{3}{2}=9$ d'où $S(0\,;\,0\,;\,9)$.

4. **a.** On vérifie que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}$ du plan (BDL).

- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BD} = 3\times(-6)+3\times 6+2\times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{BD}$.
- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BL} = 3\times(-4)+3\times 0+2\times 6 = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{BL}$.

$\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDL) donc est normal à ce plan.

b. Le plan (BDL) est l'ensemble des points P de coordonnées (x, y, z) tels que $\overrightarrow{BP}\cdot\vec{n} = 0$. Une équation du plan BDL est alors :

$$\overrightarrow{BP}\cdot\vec{n} = 0 \iff 3\left(x-x_B\right)+3\left(y-y_B\right)+2\left(z-z_B\right) = 0 \iff 3(x-6)+3y+2z = 0 \iff 3x+3y+2z-18 = 0$$

c. M est l'intersection de la droite EH et du plan (BDL) donc ses coordonnées vérifient le système paramétrique de la droite et l'équation cartésienne du plan. $\left\{\begin{array}{l}x=0\\y=s\\z=6\\3x+3y+2z-18=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=0\\y=s\\z=6\\3s+12-18=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}s=2\\x=0\\y=s\\z=6\end{array}\right.$.

Les coordonnées du point M sont donc $(0~;~2~;~6)$.

5. L'aire du triangle rectangle ELM est $\mathscr{A} = \dfrac{EL\times EM}{2} = \dfrac{2\times 2}{2} = 2$.
La hauteur ES vaut $ES = AS - AE = 9-6 = 3$.
Le volume du tétraèdre $SELM$ est alors : $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}\times ES = \dfrac{1}{3}\times 2\times 3 = 2\text{ m}^3$.

6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60°.
Le triangle SLE est rectangle en E : $\tan\left(\widehat{SLE}\right) = \dfrac{ES}{EL} = \dfrac{3}{2}$.
On en déduit que $\widehat{SLE}\approx 56,3°$; la contrainte est respectée.