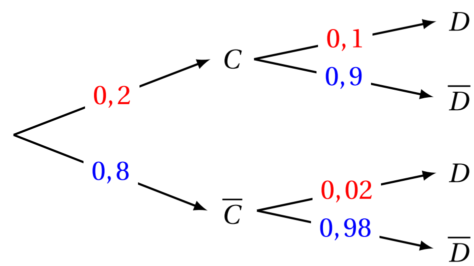
Correction

Partie 1

Puisque la commande est faite au hasard, on assimile les proportions à des probabilités. D'après l'ennoncé on a

$$P(C)=0,2 \qquad P_{\overline{C}}(D)=0,02 \qquad \text{et} \qquad P_{\overline{D}}(C)=0,1$$

On complète l'arbre pondéré suivant :



1.

$$\mathrm{P}(C\cap D)=\mathrm{P}(C)\times \mathrm{P}_C(D)=0,2\times 0,1=0,02$$

La probabilité d'avoir un casque contrefait et présentant un défaut est donc de 0,02.

2. Les événements C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, on peut appliquer donc,la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(D)=\mathrm{P}(C\cap D)+\mathrm{P}\left(C\cap \overline{D}\right)=0,02+0,8\times 0,02=1,8\times 0,02=0,036$$

La probabilité de commander un casque présentant un défaut de conception est donc de 0,036.

3. On cherche $\mathrm{P}_D(C)$, on applique donc la formule des probabilités conditionnelles :

$$\mathrm{P}_D(C)=\frac{\mathrm{P}(C\cap D)}{\mathrm{P}(D)}=\frac{0,02}{0,036}=\frac{5}{9}$$

$\mathrm{P}_D(C)\approx 0,556$à 10^{-3} près.

Partie 2

1. **a.**
- L'expérience aléatoire "Commander un casque" est une épreuve de Bernoulli qui a deux issues possibles le casque présente ou non un défaut. Le succès a une probabilité $p=P(D)=0,036$.
- On répète cette expérience $n=35$ fois, de façon indépendante (car la répétition est assimilable à un tirage **avec** remise) ;
- La variable aléatoire X compte le nombre de succès sur les 35 répétitions.

Ces trois conditions étant vérifiées, on peut conclure que X suit la loi binomiale de paramètres $n=35$ et $p=0,036$

b. On cherche $\mathrm{P}(X=1)$.

$$\mathrm{P}(X=1)=\binom{35}{1}\times 0,036^1\times(1-0,036)^{35-1}=35\times 0,036\times 0,964^{34}$$

$P(X=1)\approx 0,362$ à 10^{-3} près.

c. On peut écrire $\mathrm{P}(X\leqslant 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$ avec $P(X=0)=0,964^{35}$. Donc $P(x\leq 1)\approx 0,639$ à 10^{-3} près.

2. Soit n naturel non nul et Y la variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,036$.

On cherche la valeur de n pour laquelle $\text{P}(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

$\text{P}(Y \geqslant 1) = 1 - \text{P}(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,036^0 \times 0,964^n = 1 - 0,964^n$.

On résout dans $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\text{P}(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,964^n \geqslant 0,99\\
&\iff -0,964^n \geqslant -0,01\\
&\iff 0,964^n \leqslant 0,01\\
&\iff \ln(0,964^n) \leqslant \ln(0,01) \quad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}^{*+}\\
&\iff n\ln(0,964) \leqslant \ln(0,01)\\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \qquad \text{car} \ln(0,964) < 0
\end{aligned}$$

or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \approx 125,6$, donc $n \geq 126$

Il faut donc commander au moins 126 casques pour que la probabilité d'en avoir au moins un défectueux soit supérieure à 0,99.