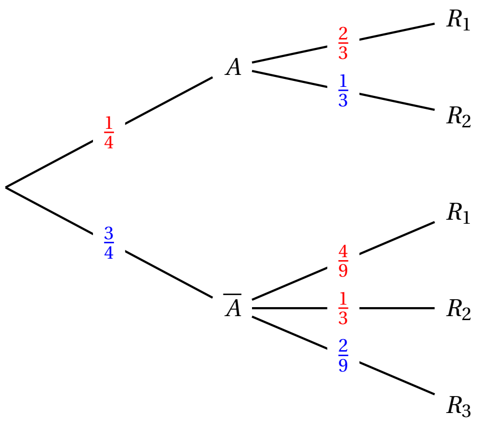
Correction

1. On calcul les probabilités en utilisant l'énoncé :

$$P(A)=\frac{75}{300}=\frac{1}{4},\qquad P_A(R_1)=\frac{50}{75}=\frac{2}{3},\quad P_{\overline{A}}(R_1)=\frac{100}{225}=\frac{4}{9},\qquad P_{\overline{A}}(R_2)=\frac{75}{225}=\frac{1}{3}$$

On modélise la situation par l'arbre pondéré suivant :



2. **a.** $P\left(A\cap R_2\right)=P(A)\times P_A\left(R_2\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$.

b. D'après la formule des probabilités totales :

$$P\left(R_2\right)=P\left(A\cap R_2\right)+P\left(\overline{A}\cap R_2\right)=\frac{1}{12}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

c. On utilise la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_{R_2}(A)=\frac{P\left(A\cap R_2\right)}{P\left(R_2\right)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

3. La variable aléatoire X peut prendre trois valeurs : $\{X=1\}$ correspond à l'évènement R_1, $\{X=2\}$ correspond à l'évènement R_2 et $\{X=3\}$ correspond à l'évènement R_3.

a. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

- $P(X=1)=P\left(R_1\right)=P\left(A\cap R_1\right)+P\left(\overline{A}\cap R_1\right)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{2}$.
- $P(X=2)=P\left(R_2\right)=\frac{1}{3}$ (question 2-b.)
- $P(X=2)=P\left(R_3\right)=P\left(\overline{A}\cap R_3\right)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{225}=\frac{50}{300}=\frac{1}{6}$ (dernier chemin de l'arbre pondéré).

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

k	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

b. L'espérance de cette variable aléatoire est : $E(X)=\sum k\times P(X=k)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}\approx 1,67$.
Cela veut dire qu'en moyenne, un candidat se présentera 1,67 à l'examen jusqu'à sa réussite.

4. **a.** On note Y La variable aléatoire qui compte le nombre de personne parmi les n choisies qui sont des "R_3". Y prend les valeurs entre 0 et n. On répète n fois de façon identique et indépendante, l'expérience qui consiste à choisir une personne. Deux issues sont possibles, la personne est "R_3 ou "$\overline{R_3}$".
Donc Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p=P(R_3)=\frac{1}{6}$. On sait que $P(Y=0)=\left(\frac{5}{6}\right)^n$.
L'évènement contraire à $\{Y=0\}$ est $\{Y\geq 1\}$ donc $P(Y\geq 1)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.
La valeur $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ est la probabilité de l'évènement « au moins une personne a réussi l'examen à la troisième tentative ».

b. La valeur renvoyée par **seuil**(0.9) est la première valeur de n pour laquelle $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>0,9$.
On considère le tableau de valeurs suivant :

n	1	2	3	4	$\cdots$	12	13
$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$	0.17	0.30	0.42	0.52	$\cdots$	0.89	0.91

Donc l'instruction **seuil**(0.9) renvoie la valeur 13.

On peut aussi procéder autrement en résolvant l'inéquation $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9.$:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9 \iff 0,1 > \left(\frac{5}{6}\right)^n \iff \ln(0,1) > \ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \iff \ln(0,1) > n\ln\left(\frac{5}{6}\right) \iff n > \frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

Or $\dfrac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 12,6$. Par conséquent il faut prendre $n = 13$ personnes sur les les 300 du groupe étudié pour que la probabilité d'en avoir une qui a réussi l'examen à sa troisième tentative soit strictement supérieure à $0,9$.