Correction

Partie A

1. **a.** La fonction f définie sur $[0;10]$ par $f(t) = 3te^{-0.5t+1}$ est dérivable $[0;10]$. On note f' sa dérivée, donc pour tout réel $t \in [0,10]$;

$$f'(t) = 3e^{-0.5t+1} + 3t(-0,5)e^{-0.5t+1} = 3(-0,5t+1)e^{-0.5t+1}$$

b. Comme pour tout $t \in [0;10]$, $e^{-0.5t+1} > 0$ alors f' est de même signe que $-0,5t+1$, on dresse le tableau de variation de la fonction f.

x	0		2		10
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f			6		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	$30e^{-4}$

c. D'après cette modélisation la quantité de médicament présente dans le sang sera maximale au bout de 2 heures. Cette quantité maximale vaut 6mg.

2. **a.** La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0;2]$ à valeurs dans $[0;6]$ et comme $5 \in [0,6]$ alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution $\alpha \in [0;2]$. On a $1,02 < \alpha < 1,03$ don $\alpha = 1,03$ à 10^{-3} près.

b. Le médicament est efficace pour $f(t) \geq 5$ donc $t \in [\alpha;\beta]$ ce qui correspond à une durée de $\beta - \alpha \approx 3,46 - 1,03 = 2,43$ heures, soit $2,43 \times 60 \approx 146$ minutes.

Partie B

1. Selon cette modélisation on a $u_1 = 0,7u_0 + 1,8 = 3,2$. La quantité de médicament présente dans le sang du patient après l'injection de la première heure vaut 3,2 mg.

2. La quantité de médicament dans le sang diminue de 30%, on multiplie donc par $0,7$ et il faut réinjecter 1,8 mg toutes les heures on ajoute alors 1,8. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

3. **a.** On note $\mathscr{P}_n$, la propriété $u_n \leq u_{n+1} < 6$ et on va montrer par récurrence que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation :. $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$, on a bien $u_0 \leq u_1 < 6$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
Hérédité : On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un entier $n \in N$ c'est à dire $u_n \leq u_{n+1} < 6$. Par suite

$$u_n \leq u_{n+1} < 6 \iff 0,7u_n + 1,8 \leq 0,7u_{n+1} + 1,8 < 0,7 \times 6 + 1,8 = 6$$

Comme $u_{n+2} = 0,7u_{n+1} + 1,8$ on a bien $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.
Conclusion : On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$. $u_n \leq u_{n+1} < 6$

b. La suite (u_n) est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$. $u_n \leq u_{n+1}$ et majorée par 6, alors d'après le théorème de la convergence monotone, la (u_n) est convergente vers une limite $\ell \leq 6$.

c. Avec l'égalité $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$, la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'équation $\ell = 0,7\ell + 1,8$ dont la solution est $\ell = \frac{1,8}{0,3} = 6$. Dans le contexte de l'exercice cela signifie que la quantité de médicament se stabilise à 6mg dans le sang du patient.

4. **a.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - (0,7u_n + 1,8) = 6 - 0,7(6 - v_n) - 1,8 = 0,7v_n$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 4$

b. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4 \times 0,7^n$ et $u_n = 6 - v_n = 6 - 4 \times 0,7^n$.

c. On cherche la valeur de n à partir de laquelle $u_n \geq 5,5$, on résout l'inéquation :

$$u_n \geq 5 \iff 6 - 4 \times 0,7^n \geq 5,5 \iff -4 \times 0,7^n \leq -0,5 \iff 0,7^n \leq 0,125$$

Comme la fonction ln est croissante

$$0,7^n \leq 0,125 \iff \ln 0,7^n \leq \ln 0,125 \iff n \ln 0,7 \leq \ln 0,125$$

$\ln 0,7 < 1$ donc $n \geq \frac{\ln 0,125}{\ln 0,7} \approx 5,8$. Il faut donc appliquer 7 injections pour que la quantité de médicament dans le sang dépasse 5,5 mg car la première injection correspond à $n = 0$.