Question 2010 II 1-2

La lettre $\mathscr{P}$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes (ń polynômes ż et ń fonctions polynômes ż seront toujours confondus, puisqu'on travaille sur le corps C, infini).
Soit $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel des fonctions entières, c'est-à-dire des fonctions $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui s'écrivent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

où la série entière figurant au second membre a un rayon de convergence infini. On a immédiatement $\mathscr{P} \subset \mathscr{E}$.

1. Démontrer que les a_n sont déterminés de façon unique par f et que l'on a plus précisément :

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} \, \mathrm{d}t$$

2. On pose $M(f,r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Démontrer que :

$$\forall r > 0, \quad \forall n \in N, \quad |a_n| \leq \frac{M(f,r)}{r^n}$$

.

3. Démontrer que $\mathscr{P}$ n'est pas égal à $\mathscr{E}$(il suffira de donner un exemple d'une fonction $f \in \mathscr{E}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, qui n'est pas un polynôme ; on justifiera la réponse).
4. Démontrer que les seules fonctions de $\mathscr{E}$ qui sont bornées sont les constantes.
5. Démontrer que $f \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformément sur $\mathbb{C}$ tout entier.