2013 partie III

On se propose détablir la surjectivité de lapplication :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto ze^z \end{cases}$$

On admettra la propriété suivante :

soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence infini, de somme Λ. On suppose que Λ ne sannule pas sur $\mathbb{C}$. Alors il existe une série entière complexe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n z^n$ de rayon de convergence infini, de somme Θ telle que :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad e^{\theta(z)} = \Lambda(z)$$

On considère une série entière complexe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence infini, de somme F. On note G la partie réelle de F, ce qui revient à poser :$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad G(z) = \frac{1}{2} \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n z^n + \overline{a}_n \overline{z}^n)$

1 (a) Démontrer la relation :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall R > 0) \quad a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} G(Re^{it}) e^{-int} \, \mathrm{d}t$$

(b) Calculer, pour tout $R > 0$, lintégrale $I(R) = \int_0^{2\pi} G(Re^{it}) \mathrm{d}t$ en fonction de a_0.

2 On suppose quil existe deux nombres réels $p \geq 0$ et $q \geq 0$ tels que :

$$(\forall z \in C), \quad G(z) \leq p|z| + q$$

(a) Démontrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall R > 0) \quad |a_n| \leq \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} (pR + q - G(Re^{it})) \mathrm{d}t$$

(b) En déduire que F est un polynôme de degré ≤ 1.

Dans la suite de cette partie, on va démontrer par labsurde que Φ est surjective. On suppose donc lexistence de $\beta \in \mathbb{C}$ tel que : $(\forall z \in \mathbb{C}), \quad \Phi(z) \neq \beta$.

3 Démontrer lexistence dune série entière complexe $\Psi(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \psi_n z^n$, de rayon de convergence infini, telle que :

$$(\forall z \in \mathbb{C}), \quad e^{\Psi(z)} = \Phi(z) - \beta = ze^z - \beta$$

On note G_Ψ la partie réelle de Ψ.

4 Démontrer lexistence de $p_0 \geq 0$ et $q_0 \geq 0$ tels que $(\forall z \in \mathbb{C}), \quad G_\Psi \leq p_0|z| + q_0$.

5 En déduire une contradiction et conclure.

6 Établir que $1/e$ admet une infinité dantécédents dans $\mathbb{C}$ par Φ.
Indication : on pourra exprimer z tel que $\Phi(z) = 1/e$ sous la forme $z = x + iy$.