Correction

1. (Formule de Cauchy). Le rayon de convergence de la série entière étant infini, la série $t \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}$ converge normalement sur $[0,2\pi]$ et
$$f(re^{it})e^{-ikt} = \sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{int} e^{-ikt}$$
Puisque la série converge normalement, donc uniformément sur $[0,2\pi]$, on peut inverser l'intégration et la sommation et on trouve
$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ikt}dt = \sum_{n\geq 0} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{int}e^{-ikt}dt$$
La dernière intégrale est égale à 0 si $k \neq n$, et à 2π sinon. Ce qui donne
$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ikt}dt = 2\pi a_k r^k$$
On en conclut que
$$\forall r>0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt$$

2. $$\forall r>0, \quad \forall n \in N, \quad |a_n r^n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|dt \leq M(f,r)$$

3. la série entière $f : z \longmapsto e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ de rayon de convergence infini n'est pas un polynôme car par exemple aucun de ses coefficients n'est nul et il y a unicité des coefficients d'une série entière ou bien parce qu'aucun polynôme non nul n'est égal à sa dérivée pour des raisons de degré. On a bien $f \in \mathscr{E}$ et $f \notin \mathscr{P}$.

4. Soit $C>0$ tel que $|f(z)|C$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors on a
$$|a_n|\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} C dt = \frac{C}{r^n}$$
Faisant tendre r vers $+\infty$, on trouve $a_n = 0$ pour $n1$, ce qui entraîne que f est constante sur $\mathbb{C}$, $f(z) = a_0$.

5. Si $f \in \mathscr{P}$, alors pour $n \geq \deg f + 1$, $R_n(f)(z) = \sum_{k\geq n} a_k z^k = 0$ et on a convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ sur $\mathbb{C}$.
Réciproquement supposons que $\sup_{z\in\mathbb{C}} \left|\sum_{k\geq n+1} a_k z^k\right| = 0$. La fonction $z \to \sum_{k\geq n+1} a_k z^k$ étant continue, il existe M tel que $\left|\sum_{k\geq n+1} a_k z^k\right| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
La question précédente montre que $\sum_{k\geq n+1} a_k z^k = a_{n+1}$ ce qui montre que f est un polynôme.