

Correction

Exercice 1

1. On considère la fonction f est définie sur \mathbb{R}_+^* par : $f(x) = x \ln(x) x + 1$
 f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout x réel strictement positif, on a :

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln(x) + \frac{x}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$$

Réponse a.

2. On a $g(x) = x^2 - x^2 \ln(x)$.
 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et d'après le cours $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x) = 0$ (croissances comparées). Donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

Réponse c.

3. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x(x^2 - 0,9x - 0,1)$.
On a donc $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 - 0,9x - 0,1 = 0$
 $x_0 = 0$ est donc une solution et pour l'équation du second degré $\Delta = 0,121 = 0,11^2 > 0$, elle admet donc deux solutions : $x_1 = -0,1$ et $x_2 = 1$.
L'équation $f(x) = 0$ a donc trois solutions : $-0,1$; 0 et 1 .

Réponse d.

4. La fonction définie sur \mathbb{R} par $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$ est dérivable sur \mathbb{R} en tant que composée de fonctions dérivables.
Et comme H est une primitive de h sur \mathbb{R} on alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, K'(x) = \frac{1}{2} \times 2H'(2x) = H'(2x) = h(2x)$$

Donc on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, K'(x) = k(x)$$

On en déduit donc que K est une primitive de k sur \mathbb{R} .

Réponse c.

5. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , en tant que produit de fonctions dérivables sur cet ensemble.
 $\forall x \in \mathbb{R}, 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x)e^x$.
On a donc $f'(1) = (1+1)e^1 = 2e$ et $f(1) = 1 \times e^1 = e$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est donc :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2e(x-1) + e = 2ex + 2e - e = 2ex - e$$

Réponse b.

$$\begin{aligned} (0,2)^n < 0,001 &\iff \ln(0,2^n) < \ln(0,001) \\ &\iff n \ln(0,2) < \ln(0,001) \\ &\iff n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)} \quad \text{car } \ln(0,2) < 0 \end{aligned}$$

Or, $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)} \approx 4,3$, donc les solutions de cette inéquation sont les entiers naturels n tels que $n \geq 5$.

6. Réponse d.

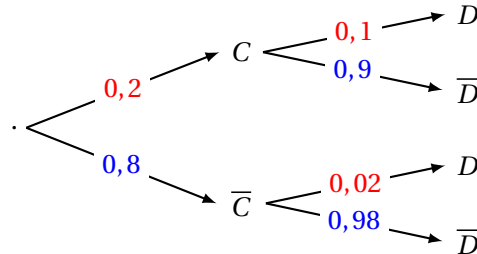
Exercice 2

Partie 1

Puisque la commande est faite au hasard, on assimile les proportions à des probabilités. D'après l'énoncé on a

$$P(C) = 0,2 \quad P_{\bar{C}}(D) = 0,02 \quad \text{et} \quad P_{\bar{D}}(C) = 0,1$$

On complète l'arbre pondéré suivant :



1.

$$P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D) = 0,2 \times 0,1 = 0,02$$

La probabilité d'avoir un casque contrefait et présentant un défaut est donc de 0,02.

2. Les événements C et \bar{C} forment une partition de l'univers, on peut appliquer donc, la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(C \cap D) + P(\bar{C} \cap D) = 0,02 + 0,8 \times 0,02 = 1,8 \times 0,02 = 0,036$$

La probabilité de commander un casque présentant un défaut de conception est donc de 0,036.

3. On cherche $P_D(C)$, on applique donc la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_D(C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0,02}{0,036} = \frac{5}{9}$$

$$P_D(C) \approx 0,556 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Partie 2

1. a.
- L'expérience aléatoire "Commander un casque" est une épreuve de Bernoulli qui a deux issues possibles le casque présente ou non un défaut. Le succès a une probabilité $p = P(D) = 0,036$.
 - On répète cette expérience $n = 35$ fois, de façon indépendante (car la répétition est assimilable à un tirage **avec** remise);
 - La variable aléatoire X compte le nombre de succès sur les 35 répétitions.

Ces trois conditions étant vérifiées, on peut conclure que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,036$

b. On cherche $P(X = 1)$.

$$P(X = 1) = \binom{35}{1} \times 0,036^1 \times (1 - 0,036)^{35-1} = 35 \times 0,036 \times 0,964^{34}$$

$$P(X = 1) \approx 0,362 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

c. On peut écrire $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$ avec $P(X = 0) = 0,964^{35}$. Donc $P(x \leq 1) \approx 0,639 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$

2. Soit n naturel non nul et Y la variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,036$.

On cherche la valeur de n pour laquelle $P(Y \geq 1) \geq 0,99$.

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,036^0 \times 0,964^n = 1 - 0,964^n.$$

On résout dans \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) \geq 0,99 &\iff 1 - 0,964^n \geq 0,99 \\ &\iff -0,964^n \geq -0,01 \\ &\iff 0,964^n \leq 0,01 \\ &\iff \ln(0,964^n) \leq \ln(0,01) \quad \text{car } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\ &\iff n \ln(0,964) \leq \ln(0,01) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \quad \text{car } \ln(0,964) < 0 \end{aligned}$$

or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \approx 125,6$, donc $n \geq 126$

Il faut donc commander au moins 126 casques pour que la probabilité d'en avoir au moins un défectueux soit supérieure à 0,99.

EXERCICE 3

1. L'année 2022 est l'année 2021 + 1, donc on doit calculer u_1 .

$$u_1 = 0,008u_0(200 - u_0) = 0,008 \times 40 \times 160 = 51,2.$$

L'estimation est donc de 51,2 oiseaux (arrondie à 51 animaux).

2. Résolvons $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 0,008x(200 - x) = x \\ &\iff 1,6x - 0,008x^2 = x \\ &\iff 0,008x^2 - 0,6x = 0 \\ &\iff x(0,008x - 0,6) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 0,008x - 0,6 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0,6}{0,008} = 75 \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions dans $[0 ; 100]$: 0 et 75.

3. a. Pour tout x entre 0 et 100, on a : $f(x) = -0,008x^2 + 1,6x$. C'est une fonction polynôme de degré 2, dont le coefficient dominant est négatif (-0,008).

Le sommet de la parabole représentant la fonction définie sur \mathbb{R} a pour abscisse : $\frac{-1,6}{2 \times (-0,008)} = 100$.

La fonction définie sur \mathbb{R} serait donc croissante sur l'intervalle $] -\infty ; 100]$ et décroissante sur $[100 ; +\infty[$, donc f , qui est définie sur $[0 ; 100]$ est bien strictement croissante sur $[0 ; 100]$.

b. Pour tout entier naturel n , on pose P_n la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$ ».

— Initialisation : On a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51,2$, donc on a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 100$ donc la propriété P_0 est vraie.

— Hérédité : Soit n un entier naturel . On suppose P_n vraie.

$$\begin{aligned}
P_n &\implies 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100 \\
&\implies f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(100) \quad f \text{ est croissante sur } [0; 100] \\
&\implies 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 80 \quad \text{car } f(0) = 0; f(100) = 80 \\
&\implies 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 100 \\
&\implies P_{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est héréditaire.

- Conclusion : La propriété P_0 est vraie, et pour un naturel n quelconque, si P_n est vraie, P_{n+1} l'est aussi donc, d'après l'axiome du raisonnement par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$$

On en déduit donc que la suite est bornée par 0 et 100, et qu'elle est croissante.

- c. La suite est croissante et majorée par 100, donc elle converge vers une limite ℓ , qui est supérieure à $u_0 = 40$ et inférieure au majorant 100.
- d. Puisque la suite est convergente et définie par récurrence et que la fonction de récurrence f est continue sur $[0; 100]$, intervalle contenant la limite ℓ , d'après le théorème du point fixe, ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Comme on a établi que cette équation n'a que deux solutions dans $[0; 100]$, 0 et 75, et que l'on a établi que ℓ est comprise entre 40 et 100, il vient que $\ell = 75$.

La suite converge donc vers 75.

4. Le principe de cette fonction `seuil(p)` est de renvoyer l'année où l'estimation dépasse le seuil p , notre suite ici est croissante et converge vers 75, donc elle est majorée par 75. Aucun terme ne dépassera donc 75, et le test de la boucle `while` sera toujours satisfait, donc on aura une fonction qui tourne de façon infinie et ne renvoie donc aucun résultat.

EXERCICE 4

Partie A

1. On a les coordonnées suivantes : A (0 ; 0 ; 0) (origine du repère), B (1 ; 0 ; 0) et G (1 ; 1 ; 1).
2. Les points A, I et G ne sont pas alignés, donc \vec{AI} et \vec{AG} sont deux vecteurs formant une base de (AIG).

$$\text{On a les coordonnées suivantes : } \vec{AI} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{BK} \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Le repère est orthonormé (car ABCDEFGH est un cube d'arête 1), donc on calcule les produits scalaires avec les coordonnées :

$$\vec{BK} \cdot \vec{AI} = -1 \times 0,5 + 0,5 \times 0 + 0,5 \times 1 = 0 : \text{ les vecteurs } \vec{BK} \text{ et } \vec{AI} \text{ sont orthogonaux.}$$

$$\vec{BK} \cdot \vec{AG} = -1 \times 1 + 0,5 \times 1 + 0,5 \times 1 = 0 : \text{ les vecteurs } \vec{BK} \text{ et } \vec{AG} \text{ sont orthogonaux.}$$

\vec{BK} étant orthogonal à deux vecteurs formant une base de (AIG), on en déduit que la droite (BK) est bien orthogonale à (AIG).

3. Puisque (BK) est orthogonale à (AIG), alors un vecteur directeur de (BK) est un vecteur normal à (AIG), notamment, $\vec{n} = -2\vec{BK}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à (AIG). Ce plan a donc une équation de la forme :

$$2x - y - z + d = 0.$$

Comme $A(0; 0; 0) \in (\text{AIG})$, on en déduit que d est tel que :

$$2x_A - y_A - z_A + d = 0 \iff 2 \times 0 - 0 - 0 + d = 0 \\ \iff d = 0$$

Finalement, une équation du plan (AIG) est donc bien $2x - y - z = 0$.

4. La droite (BK) est dirigée par $\overrightarrow{\text{BK}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ et passe par B (1 ; 0 ; 0), donc elle admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 + 0,5t \\ z = 0 + 0,5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0,5t \\ z = 0,5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Le point L dont on donne les coordonnées est clairement le point de paramètre $\frac{2}{3}$ dans la représentation paramétrique établie à la question précédente, donc $L \in (\text{BK})$.

Vérifions si L est un point du plan (AIG) : $2x_L - y_L - z_L = 2 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$.

Les coordonnées de L vérifient l'équation du plan : $L \in (\text{AIG})$.

L est donc le point d'intersection de la droite (BK) et du plan (AIG) (qui sont sécants, puisque perpendiculaires), et donc L est le projeté orthogonal de B sur le plan (AIG).

6. La distance de B à (AIG) est donc la distance (BL), et comme le repère est orthonormé :

$$\text{BL} = \sqrt{(x_L - x_B)^2 + (y_L - y_B)^2 + (z_L - z_B)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2} \\ = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+1+1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Partie B

1. a. Dans le tétraèdre ABIG, si on considère AIB comme base, alors cette base est incluse dans le plan (AIB), qui contient la face avant du cube (la face ABFE), et donc l'arête [GF] est bien perpendiculaire à ce plan, puisque ABCDEFGH est un cube.
 - b. Le tétraèdre ABIG a donc pour volume $V_{\text{ABIG}} = \frac{1}{3} \times b_{\text{ABI}} \times h_{\text{GF}} = \frac{1}{3} \times \frac{1 \times 1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$.
(Le triangle ABI a une base [AB] de longueur 1 et la hauteur correspondante, issue de I est de même longueur que [AE], donc de longueur 1 aussi).
2. Dans le triangle isocèle AIG, la hauteur principale issue de I est donc aussi une médiane, et elle passe donc par le milieu de la base principale [AG], c'est à dire par le point O.

On détermine la distance IO : $\text{IO} = \sqrt{0^2 + 0,5^2 + (-0,5)^2} = \sqrt{0,5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'aire du triangle est donc $A_{\text{AIG}} = \frac{\text{AG} \times \text{OI}}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

3. Le tétraèdre AIBG dont on a déjà calculé le volume peut aussi être vu comme ayant pour base le triangle AGI et comme hauteur correspondante, la hauteur issue de B, donc la longueur h est la distance séparant B du plan (AGI).

$$\begin{aligned}
\text{On a donc : } V_{\text{ABIG}} = \frac{1}{6} &\iff \frac{1}{3} \times A_{\text{AIG}} \times h = \frac{1}{6} \\
&\iff h = \frac{3}{A_{\text{AIG}} \times 6} \\
&\iff h = \frac{1}{2A_{\text{AIG}}} \\
&\iff h = \frac{1}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{4}} \\
&\iff h = \frac{2}{\sqrt{6}} \\
&\iff h = \frac{2\sqrt{6}}{6} \\
&\iff h = \frac{\sqrt{6}}{3}
\end{aligned}$$

On retrouve bien une distance de B au plan (AIG) qui est $\frac{\sqrt{6}}{3}$.