Correction

Exercice 1

1. On considère la fonction $g \longmapsto \ln\left(x^2+x+1\right)$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$.
La fonction $u : x \mapsto x^2+x+1$ est strictement positive et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ (fonction polynomiale,somme de termes strictement positifs), donc la fonction composée $g :\ x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. On a alors :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

Réponse d

2. la fonction $g :\ x \mapsto x\ln(x) - x$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur cet intervalle et on a

$$g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) = f(x)$$

La fonction g est donc une primitive de f.

Réponse c

3. On factorise par les termes "dominants" du quotient a_n. On a donc pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n} = \frac{3^n\left(\dfrac{1}{3^n}-1\right)}{2^n\left(\dfrac{1}{2^n}+1\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{\dfrac{1}{3^n}-1}{\dfrac{1}{2^n}+1}$$

Par somme et quotient de limites on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{3^n}-1}{\dfrac{1}{2^n}+1} = -1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$; De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{3}{2} > 1$, donc par produit de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n) = -\infty$.

Réponse a.

4. La fonction dérivé f' est décroissante sur $[-2\,;\,0]$, Donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

Réponse d

5. $f'(x)$ s'annule en $x = 1$ en changeant de signe et en passant du positif au négatif, la fonction f va donc admettre un maximum en $x = 1$.

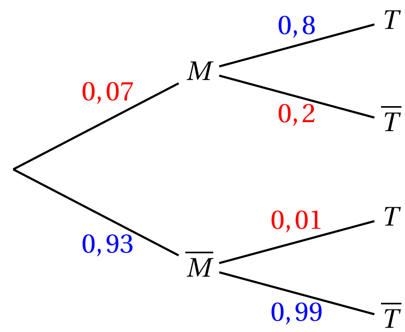
Réponse c

6. La valeur v de l'action augmente donc la boucle while s'exécute tant que $v < 200$ en ajoutant 1 à la valeur m du mois à chaque exécution.

Réponse a.

Exercice 2

1. D'après l'énoncé on a $P(M) = 0,07$, $P_M(\overline{T}) = 0,2$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$.
   On complète les donnée sur l'arbre pondéré suivant :



On a donc $P(M \cap T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$

2. Comme M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers, on peut utiliser la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,01 = 0,0653$$

3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, il est plus pertinent de calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est positif $P_T(M)$.

4. On cherche donc $P_T(M)$. La formule des probabilités conditionnelles donne :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,07 \times 0,8}{0,0653} \approx 0,86$$

5. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.
   a. Le choix de la personne dans la population étant assimilé à un tirage avec remise, on a une indépendance des 10 tirages, le succès étant défini par le test est positif, on peut assimiler cette variable aléatoire à une loi de Bernoulli de paramètre $n = 10$ et $p = 0,0653$
   b. On cherche $P(X = 2)$,

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^8 \approx 0,11$$

6. Soit n le nombre de personnes testées, on cherche $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.
   On sait que $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$ avec $P(X = 0) = 0,9347^n$ on a donc les équivalences suivantes :

$$1 - 0,9347^n \geqslant 0,99 \iff 0,9347^n \leq 0,01 \iff n\ln(0,9347) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \frac{\ln(0,01}{\ln(0,9347} \iff n \geqslant 68,19$$

il faut donc tester au minimum 69 personnes dans ce pays pour qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif.

Exercice 3

1. **a.** $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{1}{3}$ et $u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{1}{4}$.

   b.

```
def liste(k) :
    L = []
    u = 1
    for i in range(0, k+1) :
        L.append(u)
        u = u/(1+u)
    return(L)
```

2. Pour tout entier naturel n,on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{-u_n^2}{1+u_n}$$

Comme pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif on a alors :

$$\frac{-u_n^2}{1+u_n} < 0$$

Par conséquent $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc La suite (u_n) est strictement décroissante.

3. Comme (u_n) est décroissante est minorée par 0, elle est convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

4. La suite (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. la limite ℓ vérifie donc l'égalité $f(\ell) = \ell$. La résolution de cette équation donne :

$$\frac{\ell}{1+\ell} = \ell \Leftrightarrow \ell(1+\ell) - \ell = 0 \Leftrightarrow \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$$

5. **a.** Les premiers termes de la suite (u_n) sont : $\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots$, on peut conjecturer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \frac{1}{n+1}$$

   b. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété :$u_n = \dfrac{1}{n+1}$. On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

   - Initialisation :

   pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1}{0+1} = 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

   - Hérédité :

   Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   On a alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+1+1}{n+1}} = \dfrac{1}{1+(n+1)}$: $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie.

   - Conclusion :

   Comme $\mathscr{P}_0$ est vraie, et que pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ vraie implique $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie, d'après le principe de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

Exercice 4

1. **a.** L'espace est menu d'un repère orthonormé donc le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$ est donné par :

$$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = -1\times 4 + 1\times 7 - 3\times 1 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en A.

b. On a $\overrightarrow{\text{BA}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}} = 5-6+12 = 11$ et les longueurs $BA = \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{11}$ et $BC = \sqrt{5^2+6^2+4^2} = \sqrt{77}$

c. Pour calculer la mesure de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$, on exprime le produit scalaire $\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}}$ de deux façons différentes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}} = \text{BA}\times\text{BC}\times\cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right) &\Leftrightarrow 11 = \sqrt{11}\times\sqrt{77}\times\cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\Leftrightarrow 11 = \sqrt{11}\times\sqrt{11}\times\sqrt{7}\times\cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right)\\ &\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\text{ABC}}\right) = \frac{1}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

À l'aide de la calculatrice on obtient $\widehat{\text{ABC}} \approx 68°$ au degré près.

2. **a.** Un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires car ABC est un triangle rectangle.
De plus

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 2\times(-1) - 1\times 1 - 1\times(-3) = -2-1+3 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 2\times 4 - 1\times 7 - 1\times 1 = 8-7-1 = 0$$

$\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), c'est donc un vecteur normal de ce plan et du plan $\mathscr{P}$. Le plan $\mathscr{P}$ et (ABC) sont donc parallèles.

b. Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $2x-y-z+d=0$. Le point B appartient à ce plan, on a donc

$$2\times 1 + 3 + d = 0 \iff d = -5$$

Une équation du plan (ABC) est donc

$$2x-y-z-5=0$$

c. La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
De plus $\mathscr{D}$ passe par le point E. On a donc

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{D} \iff \overrightarrow{\text{E}M} = t\,\overrightarrow{n},\ \text{ avec }\ t\in\mathbb{R}$$

soit

$$\left\{\begin{array}{rcl}x-1 &=& 2t\\ y-2 &=& -t,\quad t\in\mathbb{R}\\ z-4 &=& -t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x &=& 1+2t\\ y &=& 2-t,\quad t\in\mathbb{R}\\ z &=& 4-t\end{array}\right.$$

d. le point H est l'intersection du plan (ABC) avec la droite $\mathscr{D}$, les coordonnées de H vérifient donc les équations du système suivant :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 2x-y-z-5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 2(1+2t)-(2-t)-(4-t)-5=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 6t-9=0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \dfrac{3}{2} \\ x = 4 \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

3. L'aire $\mathscr{B}$ du triangle rectangle ABC est donnée par $\mathscr{B} = \dfrac{\text{AB} \times \text{AC}}{2}$ avec $AC = \sqrt{4^2+7^2+1^2} = \sqrt{66}$ et donc

$$\mathscr{B} = \frac{\sqrt{11} \times \sqrt{66}}{2} = \frac{11\sqrt{6}}{2}$$

h=HE est la hauteur de la pyramide. On a $\overrightarrow{\text{HE}} \begin{pmatrix} -3 \\ \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$

On calcule la longueur h= HE $= \sqrt{(-3)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{27}{2}}$, Finalement on calcule le volume $\mathscr{V}$ de la pyramide ABCE

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{B}h = \frac{1}{3} \times \frac{11\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{\frac{27}{2}} = 16,5 \text{ unités de volume}$$