Chapitre 11 : VARIABLES ALÉATOIRES

En 1654, *Blaise Pascal* (1623 ; 1662) entretient avec *Pierre de Fermat* (1601 ; 1665) des correspondances sur le thème des jeux de hasard et d'espérance de gainqui les mènent à exposer une théorie nouvelle : les calculs de probabilités. Ils s'intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement comme par exemple celui du *Chevalier de Méré* : *« Comment distribuer équitablement la mise à un jeu de hasard interrompu avant la fin ? »*

I. Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Variable aléatoire

Exemple :

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat."

L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles.

On considère l'événement A : "On obtient un résultat pair. "On a donc : $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.

On considère l'événement élémentaire E : "On obtient un 3". On a donc : $E = \{3\}$.

Définitions :

- Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle une **issue.**
- L'**univers des possibles** est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
- Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers des possibles.
- Un **événement élémentaire** est un événement contenant une seule issue.

Exemple : Dans l'expérience précédente, on considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2€.
- Si le résultat est 1, on gagne 3€.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€.

On a défini ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou –4.

On a donc : $X(1) = 3$, $X(2) = 2$, $X(3) = -4$, $X(4) = 2$, $X(5) = -4$, $X(6) = 2$

Définition : Une **variable aléatoire** X est une fonction définie sur un univers Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$.

2) Loi de probabilité

Exemple : On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.

Chaque issue du lancer de dé est équiprobable et égale à $\frac{1}{6}$.

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 2 est égale à $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

On note : $P(X = 2) = \frac{1}{2}$. De même : $P(X = 3) = \frac{1}{6}$ et $P(X = -4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	-4	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Ce tableau résume la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Définition : Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
La **loi de probabilité** de X associe à toute valeur x_i la probabilité $P(X = x_i)$.

Remarques :

$P(X = x_i)$ peut se noter p_i.

$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

Exemple : Dans l'exemple traité plus haut : $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$.

Méthode : Déterminer une loi de probabilité

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."

On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi, on gagne 5 €.

- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Solution : La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, –1 mais aussi 7.
En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 5(roi) + 2(cœur) = 7 €.

- Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), X = 2. P(X = 2) = $\frac{7}{32}$.
- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), X = 5. P(X = 5) = $\frac{3}{32}$.
- Si la carte tirée est le roi de cœur, X = 7. P(X = 7) = $\frac{1}{32}$.
- Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, X = –1. P(X = –1) = $\frac{21}{32}$.

La loi de probabilité de X est :

x_i	–1	2	5	7
P(X = x_i)	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

On constate que : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{21}{32} + \frac{7}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = 1$

II. Espérance, variance, écart-type

Définitions : Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $p_i = P(X = x_i)$.

- L'**espérance mathématique** de la loi de probabilité de X est :
  $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$

- La **variance** de la loi de probabilité de X est :
  $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2$
- L'**écart-type** de la loi de probabilité de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Méthode : Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une loi de probabilité
Dans le jeu de la "Méthode" du paragraphe précédent, calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la loi de probabilité de X et interpréter les résultats pour l'espérance et l'écart-type.

$$E(X) = \frac{21}{32} \times (-1) + \frac{7}{32} \times 2 + \frac{3}{32} \times 5 + \frac{1}{32} \times 7 = \frac{15}{32}$$

$$V(X) = \frac{21}{32} \times \left(-1 - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{7}{32} \times \left(2 - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{3}{32} \times \left(5 - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{1}{32} \times \left(7 - \frac{15}{32}\right)^2 \approx 5{,}1865$$

$$\sigma(X) \approx \sqrt{5{,}1865} \approx 2{,}28$$

L'espérance est égale à $\frac{15}{32} \approx 0{,}5$ signifie qu'en jouant un grand nombre de fois à ce jeu, on peut espérer en moyenne gagner environ 0,50 €.
L'écart-type est environ égal à 2,28 signifie qu'avec une espérance proche de 0,50 le risque de perdre de l'argent est important.

Remarques :

- L'espérance est la moyenne de la série des x_i pondérés par les probabilités p_i.

En effet :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \frac{p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n}{1} = \frac{p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n}{p_1+p_2+\dots+p_n}$$

En répétant un grand nombre de fois l'expérience, la loi des grands nombres nous permet d'affirmer que les fréquences se rapprochent des probabilités théoriques. La moyenne des résultats se rapprochent donc de

l'espérance de la loi de probabilité. **L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.**
- La variance (respectivement l'écart-type) est la variance (respectivement l'écart-type) de la série des x_i pondérés par les probabilités p_i. **L'écart-type est donc une caractéristique de dispersion "espérée" pour la loi de probabilité de la variable aléatoire.**

Propriétés : Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω. Soit a et b deux nombres réels.
On a : E(aX+b) = aE(X)+b V(aX+b) = a^2V(X)

Démonstrations :

$$E(aX+b) = \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i+b) = a\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + b\sum_{i=1}^{n} p_i = a\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + b\times 1 = aE(X)+b$$

$$V(aX+b) = \sum_{i=1}^{n} p_i\big(ax_i+b-(aE(X)+b)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\big(ax_i-aE(X)\big)^2 = a^2\sum_{i=1}^{n} p_i\big(x_i-E(X)\big)^2 = a^2V(X)$$

Méthode : Simplifier les calculs d'espérance et de variance à l'aide d'une variable aléatoire de transition

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.
L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.
On considère la variable aléatoire X qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.
La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.
Solution
Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire $Y = 1000X – 1300$.
La loi de probabilité de Y est alors :

x_i	–2	–1	0	1	2
$P(Y = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculons l'espérance et la variance de la loi de probabilité de Y :
$E(Y) = –2\text{x}0,2 + (–1)\text{x}0,1 + 1\text{x}0,4 + 2\text{x}0,1 = 0,1$
$V(Y) = 0,2\text{x}(–2 – 0,1)^2 + 0,1\text{x}(–1 – 0,1)^2 + 0,2\text{x}(0 – 0,1)^2 + 0,4\text{x}(1 – 0,1)^2$
$+ 0,1\text{x}(2 – 0,1)^2 = 1,69$
On en déduit l'espérance et la variance de la loi de probabilité de X :
$E(Y) = E(1000X – 1300) = 1000\,E(X) – 1300$

Donc : $E(X) = \dfrac{E(Y)+1300}{1000} = \dfrac{0,1+1300}{1000} = 1,3001$

$V(Y) = V(1000X – 1300) = 1000^2\,V(X)$

Donc : $V(X) = \dfrac{V(Y)}{1000^2} = \dfrac{1,69}{1000^2}$

Et donc : $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{1,69}{1000^2}} = \dfrac{1,3}{1000} = 0,0013$

Conclusion : $E(X) = 1,3001$ cm et $\sigma(X) = 0,0013$ cm.