Classe 1 ère spécialité maths.
Chapitre 5 -Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Exemple d'introduction

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie bénigne. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

1) On choisit au hasard un patient et on considère les évènements suivants :
A : « Le patient a pris le médicament A. »
G : « Le patient est guéri. »
On a alors :

La probabilité qu'un patient soit traité avec le médicament A est égale à $P(A)=\dfrac{455}{800}$.

La probabilité qu'un patient soit guéri est égale à $P(G)=\dfrac{674}{800}$.

La probabilité qu'un patient soit guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale à $P(G\cap A)=\dfrac{383}{800}$.

2) On choisit maintenant au hasard un **patient guéri.**
La probabilité que ce patient ait pris le médicament A sachant qu'il est guéri se note $P_G(A)$ et est égale à

$P_G(A)=\dfrac{383}{674}$. On constate que $\dfrac{P(G\cap A)}{P(G)}=\dfrac{383/800}{674/800}=\dfrac{383}{674}=P_G(A)$.

II. Probabilité conditionnelle

Dans tout le chapitre, E désigne l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire et P désigne une loi de probabilité sur E.

Définition : Soit A et B deux événements avec $P(A)\neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ et est définie par : $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Exemples :
1) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit A l'événement "Le résultat est un pique".
Soit B l'événement "Le résultat est un roi".
Donc $A\cap B$ est l'événement "Le résultat est le roi de pique".

Alors : $P(A)=\dfrac{8}{32}=\dfrac{1}{4}$ et $P(A\cap B)=\dfrac{1}{32}$.
Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :
$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{1}{32}:\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$.
On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est un pique, on a une chance sur 8 d'obtenir le roi.

2) Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires, où il est marqué soit "Gagné" ou soit "Perdu"
Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné.
Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné.
On tire au hasard une boule dans le sac.
Soit R l'événement "On tire une boule rouge".
Soit G l'événement "On tire une boule marquée Gagné"
Donc $R \cap G$ est l'événement "On tire une boule rouge marquée Gagné".

Alors : $P(R) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0,4$ et $P(R \cap G) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3$.
Donc la probabilité qu'on tire une boule marquée Gagné sachant qu'elle est rouge est :
$P_R(G) = \frac{P(R \cap G)}{P(R)} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4} = 0,75$.
On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est une boule rouge, on a 15 chances sur 20 qu'il soit marqué Gagné.

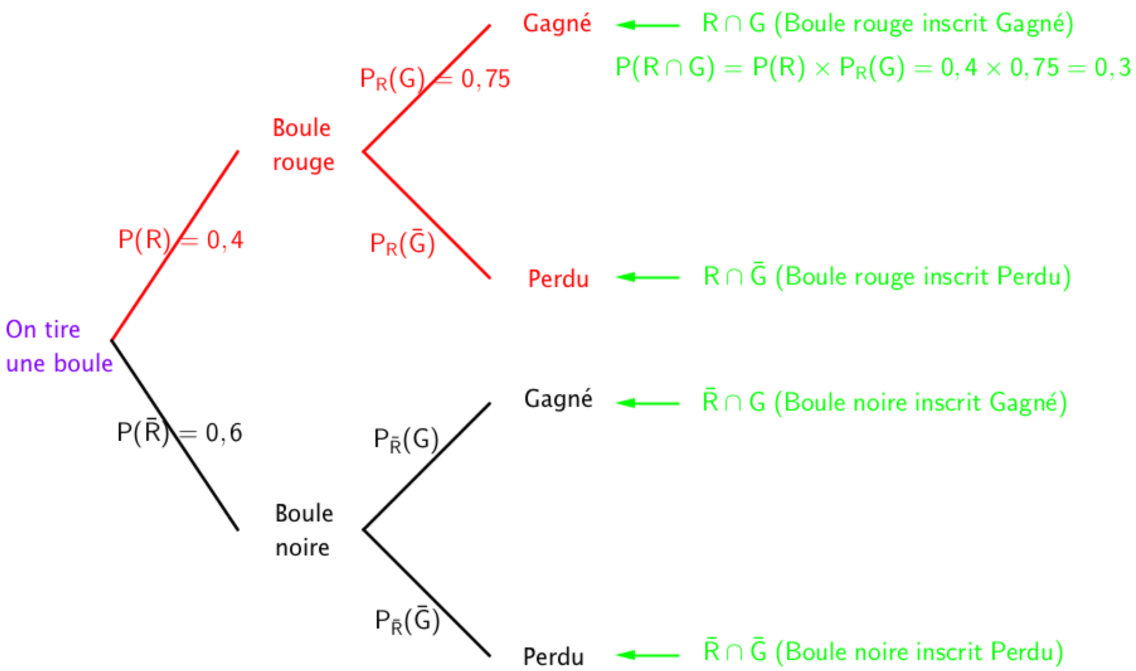
Remarque :
La probabilité conditionnelle suit les règles et lois de probabilités vues dans les classes antérieures. On a en particulier :

Propriétés : Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.
$0 \leq P_A(B) \leq 1$ - $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$ - $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

III. Arbre pondéré

1) Exemple

On reprend le 2e exemple étudié au paragraphe I.
L'expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) :



2) Règles

Règle 1 : La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemples :
- A partir du nœud "On tire une boule", on a : $P(R) + P(\bar{R}) = 0,4 + 0,6 = 1$
- A partir du nœud "Boule rouge", on a : $P_R(\bar{G}) = 1 - P_R(G) = 1 - 0,75 = 0,25$.

Ces exemples font apparaître une formule donnée au paragraphe I.

<u>Règle 2 :</u> La probabilité d'une "feuille" (extrémité d'un chemin) est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette feuille.

<u>Exemple :</u>
On considère la feuille $R \cap G$.
On a : $P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$

<u>Règle 3 (Formule des probabilités totales) :</u> La probabilité d'un événement associé à plusieurs "feuilles" est égale à la somme des probabilités de chacune des ces "feuilles".

<u>Exemple :</u>
L'événement "On tire une boule marquée Gagné" est associé aux feuilles $R \cap G$ et $\bar{R} \cap G$. On a :

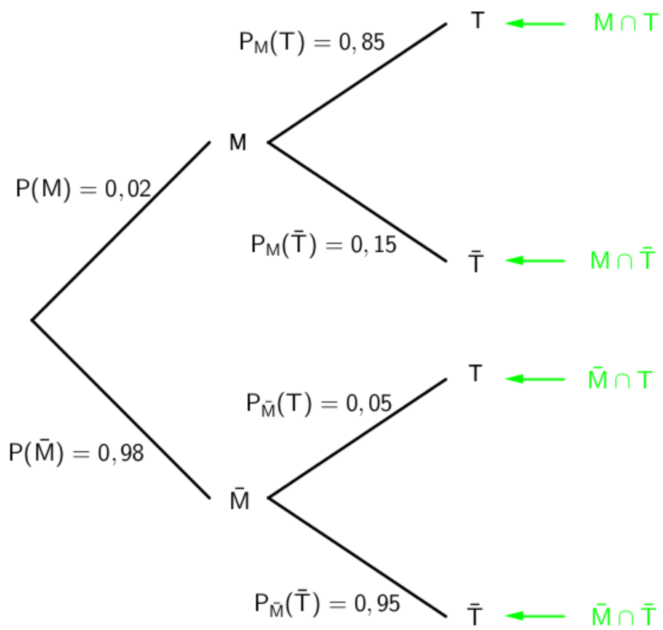
$P(R \cap G) = 0,3$ et
$P(\bar{R} \cap G) = \frac{9}{50} = 0,18$ (Probabilité de tirer une boule noire marquée Gagné)
Donc $P(G) = P(R \cap G) + P(\bar{R} \cap G) = 0,3 + 0,18 = 0,48$.

<u>Méthode :</u> Calculer la probabilité d'un événement associé à plusieurs feuilles

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :
– si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
– si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».
1) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
2) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

D'après BAC S, Antilles-Guyanne 2010

Solution
1)



La probabilité que le test soit positif est associée aux deux feuilles $M \cap T$ et $\bar{M} \cap T$.

$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$ (formule des probabilités totales)
= 0,02 x 0,85 + 0,98 x 0,05 = 0,066.
La probabilité que le test soit positif est égale à 6,6%.

2) $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{0,02 \times 0,85}{0,066} \approx 0,26$.
La probabilité que le bovin soit malade sachant que le test est positif est d'environ 26%.

IV. Indépendance de deux événements

Définition : On dit que deux évènements A et B de probabilité non nulle sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque :
On a également : A et B sont indépendants, si et seulement si, $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.
Exemple :
On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit R l'événement "On tire un roi".
Soit T l'événement "On tire un trèfle".
Alors $R \cap T$ est l'événement "On tire le roi de trèfle".
On a :

$P(R) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$, $P(T) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$ et $P(R \cap T) = \dfrac{1}{32}$. Donc $P(R) \times P(T) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{32} = P(R \cap T)$.
Les événements R et T sont donc indépendants.
Ainsi, par exemple, $P_T(R) = P(R)$. Ce qui se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles et égale à la probabilité de tirer un roi parmi toutes les cartes.
Contre-exemple : On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.
Ainsi :

$P(R) = \dfrac{4}{34} = \dfrac{2}{17}$, $P(T) = \dfrac{8}{34} = \dfrac{4}{17}$ et $P(R \cap T) = \dfrac{1}{34}$. Donc $P(R) \times P(T) = \dfrac{2}{17} \times \dfrac{4}{17} = \dfrac{8}{289} \neq P(R \cap T)$.
Les événements R et T ne sont donc pas indépendants.

Méthode : Utiliser l'indépendance de deux événements
Dans une population, un individu est atteint par la maladie *m* avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie *n* avec une probabilité égale à 0,01.
On choisit au hasard un individu de cette population.
Soit M l'événement "L'individu a la maladie *m*".
Soit N l'événement "L'individu a la maladie *n*".
On suppose que les événements M et N sont indépendants.
Calculer la probabilité de l'événement E "L'individu a au moins une des deux maladies".
Solution
$P(E) = P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$
$= P(M) + P(N) - P(M) \times P(N)$, car les événements M et N sont indépendants.
= 0,005 + 0,01 – 0,005 x 0,01 = 0,01495
La probabilité qu'un individu choisi au hasard ait au moins une des deux maladies est égale à 0,01495.

Propriété : Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (exigible BAC) :

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B \cap \bar{A})$$
$$= P(B) \times P_B(\bar{A})$$
$$= P(B) \times \left(1 - P_B(A)\right)$$
$$= P(B) \times \left(1 - P(A)\right) \text{ car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants}$$
$$= P(B) \times P(\bar{A}) \qquad \text{Donc } \bar{A} \text{ et B sont indépendants.}$$

Exemple :

Lors d'un week-end prolongé, *Bison futé* annonce qu'il y a 42% de risque de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A6 et 63% sur l'autoroute A7.
Soit A l'événement "On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A6."
Soit B l'événement "On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A7."
On suppose que les événements A et B sont indépendants.
Alors les événements $\bar{A}$ et B sont également indépendants et on a :

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B) = 0{,}58 \times 0{,}63 = 0{,}3654$$

On peut interpréter ce résultat :
La probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A7 mais pas sur l'autoroute A6 est égale à 36,54%