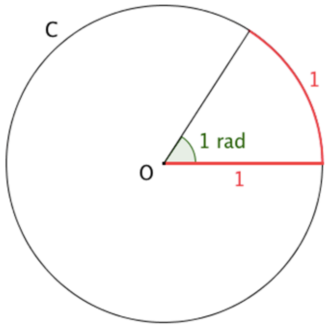
Classe de 1ere -Chapitre 6 – TRIGONOMÉTRIE (partie 1)

I. Radian et cercle trigonométrique

1) Le radian

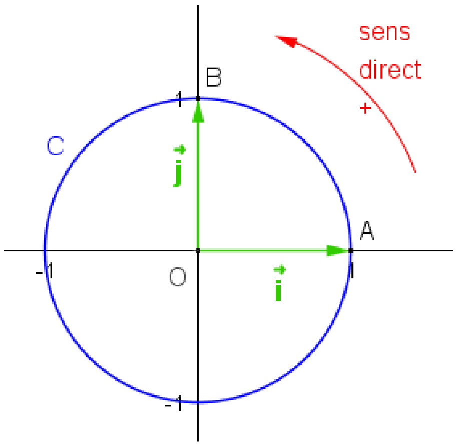
Définition :
Soit un cercle C de centre O et de rayon 1.
On appelle radian, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



2) Cercle trigonométrique

Définition : Sur un cercle, on appelle **sens direct**, **sens positif** ou **sens trigonométrique** le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Définition : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et orienté dans le sens direct, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.

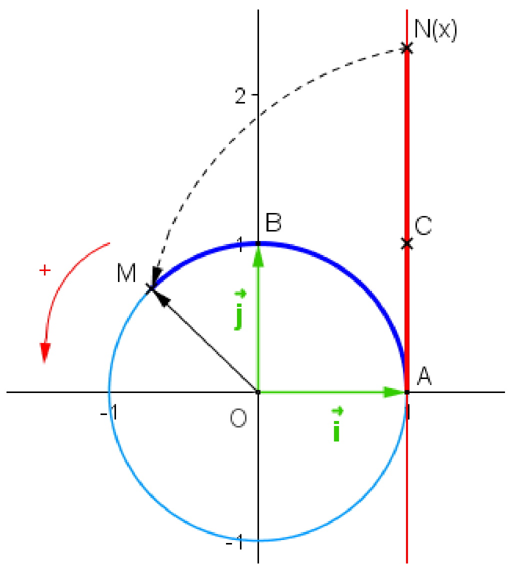


3) Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A;\vec{j})$ soit un repère de la droite.

Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.



Propriété : Un angle plein (tour complet) mesure 2π radians.

Démonstration :
La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.
En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$.
Or la longueur d'un arc et la mesure de l'angle qui l'intercepte sont proportionnelles.

Comme 1 radian est la mesure de l'angle qui intercepte un arc de longueur 1 sur le cercle trigonométrique, on en déduit que la mesure de l'angle plein est égale à 2π radians.

4) Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°.
Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Mesure en degrés	0	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Méthode : Passer des degrés aux radians et réciproquement

1) Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 33°.

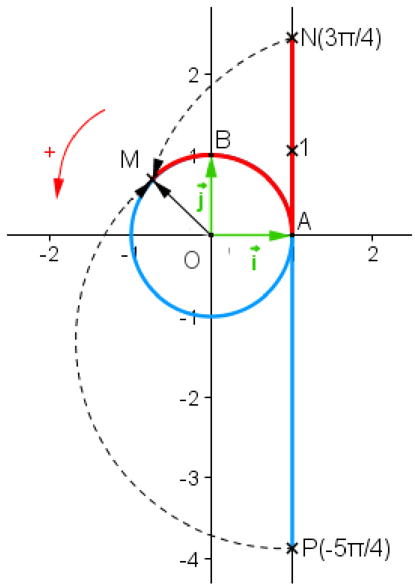
2) Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

2π	?	$\frac{3\pi}{8}$
360°	33°	?

1) $\alpha = 33 \times \frac{2\pi}{360} = \frac{11\pi}{60}$ 2) $\beta = \frac{3\pi}{8} \times \frac{360}{2\pi} = 67{,}5°$

5) Plusieurs enroulements de la droite

A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle. La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle.



Exemples :

- Ci-contre, les points N et P d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{4}$ correspondent tous les deux au point M.

En effet : $\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4}$

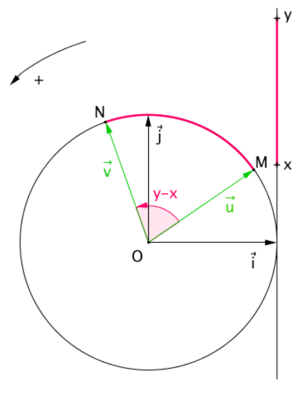
- On pourrait poursuivre le processus dans l'autre sens en effectuant deux tours successifs.

Ainsi, les points d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{19\pi}{4}$ correspondent au point M.

En effet : $\frac{3\pi}{4} + 4\pi = \frac{19\pi}{4}$.

II. Mesure d'un angle orienté et mesure principale

1) Cas d'angles orientés de norme 1



On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ et orienté dans le sens direct.
On considère le cercle trigonométrique de centre O.
Au point d'abscisse x de la droite d'enroulement, on fait correspondre le point M du cercle.
Au point d'abscisse y de la droite d'enroulement, on fait correspondre le point N du cercle.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de norme 1 tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.

<u>Définition :</u> Une <u>mesure de l'angle orienté</u> $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ est $y - x$.

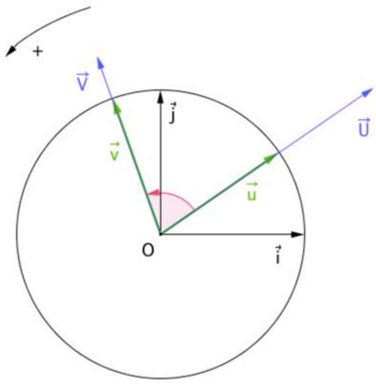
<u>Propriété :</u> On note α une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

Toute mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ est de la forme $\alpha + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

<u>Démonstration :</u>
On fait correspondre le point M du cercle à deux points d'abscisses x et x' de la droite d'enroulement.
On a : $x' = x + 2k_1\pi$ où k_1 est un entier relatif.
On fait correspondre le point N du cercle à deux points d'abscisses y et y' de la droite d'enroulement.
On a : $y' = y + 2k_2\pi$ où k_2 est un entier relatif.
Alors $y - x$ et $y' - x'$ sont deux mesures de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.
Et on a : $y' - x' = y - x + 2\left(k_2 - k_1\right)\pi = y - x + 2k\pi$ en posant $k = k_2 - k_1$.

2) **<u>Cas d'angle orientés quelconques (et non nuls)</u>**

Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de norme 1
et respectivement colinéaires à $\vec{U}$ et à $\vec{V}$.



<u>Définition :</u> Une <u>mesure de l'angle orienté</u> $\left(\vec{U}\,;\vec{V}\right)$ est égale à une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

2) **<u>Mesure principale d'un angle orienté</u>**

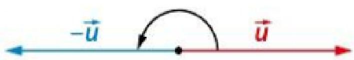
<u>Définition :</u> La <u>mesure principale d'un angle orienté</u> est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$.

<u>Exemple :</u> Une mesure d'un angle orienté est 5π.
D'autres mesures sont : 5π - 2π ; 5π - 4π ; 5π - 6π ; … soit : 3π ; π ; -π ; …
π est donc la mesure principale de cet angle orienté.

III. <u>Propriété des angles orientés</u>

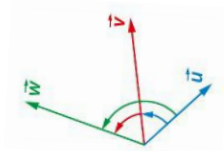
1) **<u>Angle nul, angle plat</u>**

<u>Propriétés :</u> Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul, on a : 1) $\left(\vec{u}\,;\vec{u}\right) = 0$ 2) $\left(\vec{u}\,;-\vec{u}\right) = \pi$



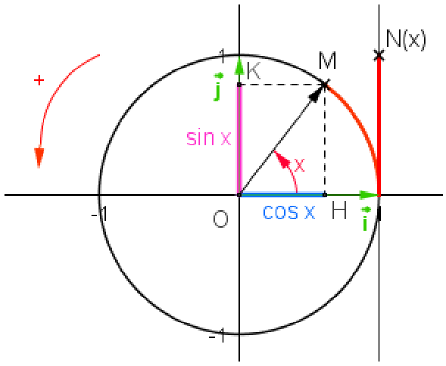
2) **<u>Relation de Chasles</u>**

<u>Propriété :</u> Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, on a : $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right) + \left(\vec{v}\,;\vec{w}\right) = \left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)$



IV. Cosinus et sinus d'un angle

1) Définitions :



Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O.

Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x.

À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.
On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.

Définitions :
- Le cosinus du nombre réel x est l'abscisse de M et on note **cos** x.
- Le sinus du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note **sin** x.

Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et x une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

On a : $\cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\cos x$ et $\sin\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\sin x$.

Définitions : Le cosinus (respectivement le sinus) de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ est le cosinus (respectivement le sinus) d'une de ses mesures.

2) Propriétés

Propriétés : Pour tout nombre réel x, on a :
1) $-1\leq \cos x\leq 1$ 2) $-1\leq \sin x\leq 1$ 3) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$
4) $\cos x=\cos\left(x+2k\pi\right)$ où k entier relatif 5) $\sin x=\sin\left(x+2k\pi\right)$ où k entier relatif

Démonstrations :
1) 2) 3) Propriétés démontrées en classe de 2nde
4) 5) Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x+2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

3) Cosinus et sinus d'angles associés

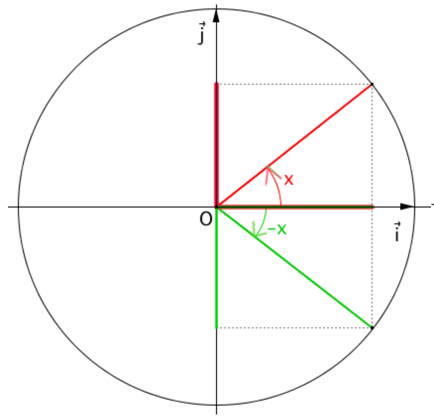
Définition : Deux angles sont dits associés s'ils admettent des cosinus et des sinus égaux ou opposés.

Propriétés : Pour tout nombre réel x, on a :
1) $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$
2) $\cos\left(\pi+x\right)=-\cos x$ et $\sin\left(\pi+x\right)=-\sin x$
3) $\cos\left(\pi-x\right)=-\cos x$ et $\sin\left(\pi-x\right)=\sin x$
4) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$
5) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

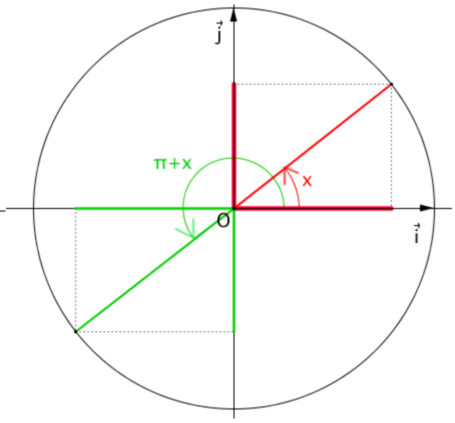
Démonstrations :

Par symétries, on démontre les résultats :

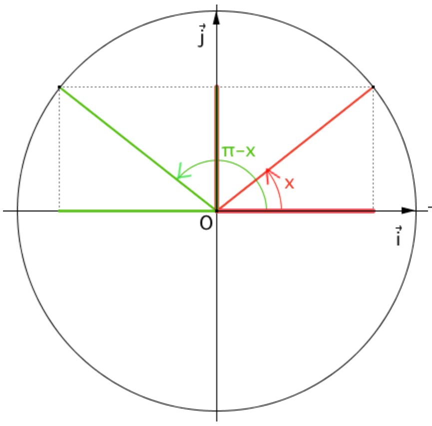
1)



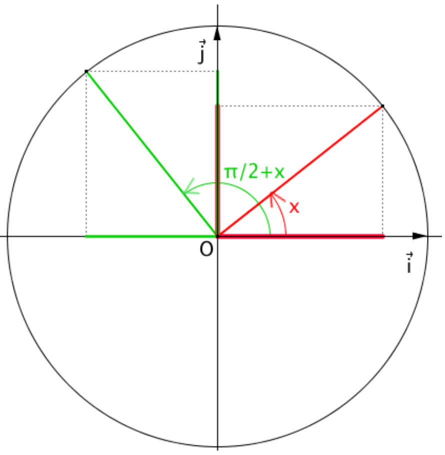
2)



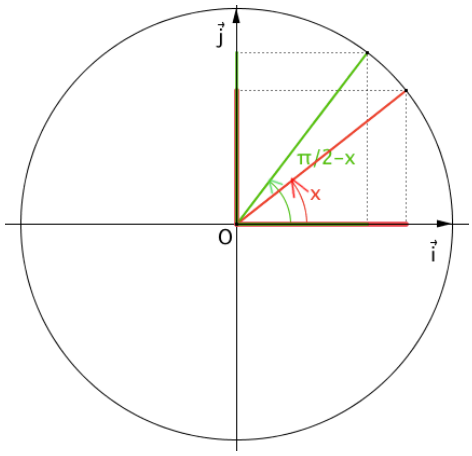
3)



4)



5)



IV. Equations trigonométriques

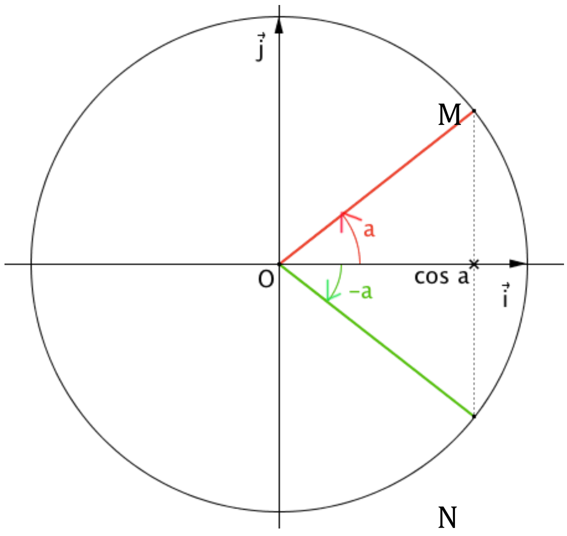
1) Equation $\cos x = \cos a$

Propriété : Soit a un nombre réel.
L'équation $\cos x = \cos a$ a pour solutions les nombres réels $a + 2k\pi$ et $-a + 2k\pi$ où k est un nombre relatif.

Démonstration :

Par symétrie, on démontre qu'il existe deux points M et N du cercle dont les abscisses sont égales à cos a.

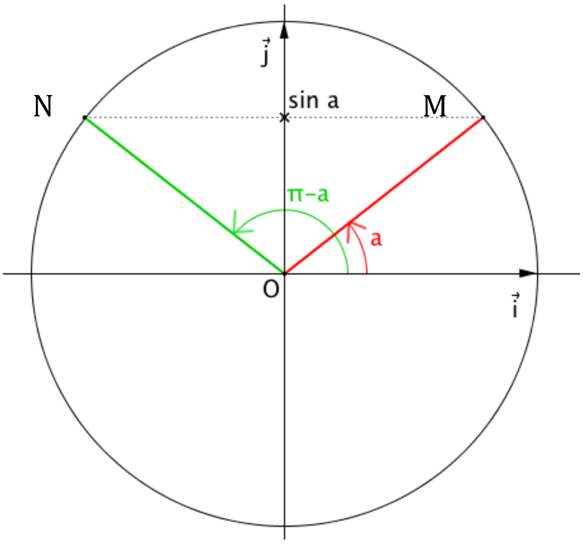
Ces points sont tels que $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right) = a + 2k\pi$ et $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{ON}\right) = -a + 2k\pi$ avec k un nombre relatif.



2) Equation sin x = sin a

<u>Propriété :</u> Soit a un nombre réel.
L'équation sin x = sin a a pour solutions les nombres réels $a+2k\pi$ et $\pi-a+2k\pi$ où k est un nombre relatif.

Démonstration :
Par symétrie, on démontre qu'il existe deux points M et N du cercle dont les ordonnées sont égales à sin a.
Ces points sont tels que $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right)=a+2k\pi$ et $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{ON}\right)=\pi-a+2k\pi$ avec k un nombre relatif.



<u>Méthode :</u> Résoudre une équation trigonométrique

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : a) $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$ b) $\sin x=-0{,}5$

a) L'équation $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$ a pour solution $\frac{\pi}{6}+2k\pi$ et $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ où k est un entier relatif.

b) $\sin x=-0{,}5$ donc $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

L'équation a pour solution $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ et $\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ où k est un entier relatif.