

Correction

Partie A

1. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} , sa fonction dérivée notée g' s'écrit:

$$g'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3} = \frac{-2}{3} e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}$$

2. On remarque $g'(0) = \frac{2}{3}(1 - e^0) = 0$ et

$$g'(x) < 0 \iff 1 - e^{-\frac{1}{3}x} < 0 \iff 1 < e^{-\frac{1}{3}x}, \text{ Comme la fonction } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ \text{on a } g'(x) < 0 \iff \ln(1) < \frac{-1}{3}x \iff 0 < \frac{-1}{3}x \iff x < 0 \text{ et } g'(x) > 0 \iff x > 0$$

Tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g	$+\infty$	↘ 0	↗ $+\infty$

3. La fonction g admet un minimum atteint en $x=0$, on a donc : $g(x) \geq 0$ pour tout réel x .

Partie B

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2e^{-\frac{1}{3}x}$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

- (a) l'équation réduite de la droite (Δ_0) tangente à la courbe \mathcal{C}_f en $M(0 ; 2)$ est de la forme:

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$\text{Avec } f(0) = 2 \text{ et } f'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) e^{-\frac{1}{3}x} = -\frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}x} \text{ donc } f'(0) = -\frac{2}{3}$$

La tangente à la courbe \mathcal{C}_f a donc pour équation $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

- (b) Pour étudier, sur \mathbb{R} , la position de cette courbe \mathcal{C}_f par rapport à la tangente (Δ_0) , on étudie le signe de la différence $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x + 2\right)$.

$$f(x) - \left(-\frac{2}{3}x + 2\right) = 2e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2 = g(x)$$

D'après la question A-3., on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$, donc la courbe \mathcal{C}_f est toujours au dessus de la tangente Δ_0 .

Partie C

1. Soit A le point de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse a , a réel quelconque.

La tangente (Δ_a) à la courbe \mathcal{C}_f au point A a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
c'est-à-dire $y = -\frac{2}{3}e^{\frac{-1}{3}x}(x - a) + 2e^{\frac{-1}{3}a}$.

Elle coupe l'axe des abscisses en un point P dont l'abscisse x est solution de l'équation $y = 0$ soit :

$$-\frac{2}{3}e^{\frac{-1}{3}a}(x - a) + 2e^{\frac{-1}{3}a} = 0$$

Ce qui donne

$$-\frac{2}{3}e^{\frac{-1}{3}a}(x - a) + 2e^{\frac{-1}{3}a} = 0 \iff \frac{2}{3}e^{\frac{-1}{3}a}(x - a) = 2e^{\frac{-1}{3}a} \iff x - a = \frac{2e^{\frac{-1}{3}a}}{\frac{2}{3}e^{\frac{-1}{3}a}} = 3$$

$$\iff x = a + 3$$

Donc (Δ_a) coupe l'axe des abscisses en un point P de coordonnées $(a + 3 ; 0)$.

2. La tangente (Δ_{-2}) à la courbe \mathcal{C}_f au point B d'abscisse -2 coupe l'axe des abscisses au point P de coordonnées $(-2 + 3 ; 0)$ soit $P(1 ; 0)$.

La construction de la tangente (Δ_{-2}) revient à tracer La droite (BP).