Exercice 3

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2.$$

1. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

   Montrer que, pour tout réel x :

   $$g'(x) = \frac{-2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}.$$

2. En déduire le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le signe de $g(x)$, pour tout x réel.

Partie B :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$

   et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

   (a) Montrer que la tangente (Δ_0) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M(0 ; 2) admet une équation de la forme :

   $$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

   (b) Etudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente (Δ_0).

Partie C :

1. Soit A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a, a réel quelconque.

   Montrer que la tangente (Δ_a) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a + 3$.

2. Expliquer la construction de la tangente (Δ_{-2}) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse -2.

Correction

Partie A

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$,sa fonction dérivée notée g' s'écrit:
$g'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3} = \frac{-2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}$

2. On remarque $g'(0) = \frac{2}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{0}\right) = 0$ et
$g'(x) < 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} < 0 \iff 1 < \mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x}$, Comme la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a $g'(x) < 0 \iff \ln(1) < \frac{-1}{3}x \iff 0 < \frac{-1}{3}x \iff x < 0$ et $g'(x) > 0 \iff x > 0$
Tableau de variations de la fonction g:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction g admet un minimum atteint en x=0, on a donc : $g(x) \geqslant 0$ pour tout réel x.

Partie B

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

   (a) l'équation réduite de la droite (Δ_0) tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en M(0 ; 2) est de la forme:
$$y = f'(0)\,(x - 0) + f(0)$$
Avec $f(0) = 2$ et $f'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x}$ donc $f'(0) = -\frac{2}{3}$
La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ a donc pour équation $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

   (b) Pour étudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente (Δ_0), on étudie le signe de la différence $f(x) - \left(-\frac{2}{3}x + 2\right)$.
$$f(x) - \left(-\frac{2}{3}x + 2\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2 = g(x)$$
D'après la question A-3., on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours au dessus de la tangente Δ_0.

Partie C

1. Soit A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a,\ a$ réel quelconque.

   La tangente (Δ_a) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A a pour équation $y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$ c'est-à -dire $y = -\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x}\,(x-a) + 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}$.

   Elle coupe l'axe des abscisses en un point P dont l'abscisse$x$ est solution de l'équation $y = 0$ soit :

   $$-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}\,(x-a) + 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a} = 0$$

   Ce qui donne

   $$-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}\,(x-a) + 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a} = 0 \iff \frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}\,(x-a) = 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a} \iff x - a = \frac{2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}}{\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}} = 3$$

   $$\iff x = a + 3$$

   Donc (Δ_a) coupe l'axe des abscisses en un point P de coordonnées $(a+3\ ;\ 0)$.

2. La tangente (Δ_{-2}) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse -2 coupe l'axe des abscisses au point P de coordonnées $(-2+3\ ;\ 0)$ soit $P(1\ ;\ 0)$.

   La construction de la tangente (Δ_{-2}) revient à tracer La droite (BP).