On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2+1}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Soit A un réel strictement positif. On pose $I_A = \displaystyle\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Justifier que $I_A = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-A^2+1}\right)$.

b. Calculer la limite de I_A lorsque A tend vers $+\infty$.
On admet que cette limite est l'aire en unités d'aire située entre la partie de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0\,;\,+\infty[$ et l'axe des abscisses.

2. Comme illustré sur le graphique ci-dessous, on s'intéresse à la partie grisée du plan qui est délimitée par :

- la courbe $(\mathscr{C})$ sur $\mathbb{R}$ et la courbe $(\mathscr{C}')$ symétrique de $(\mathscr{C})$ par rapport à l'axe des abscisses ;
- le cercle de centre $\Omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,0\right)$ et de rayon 0,5 et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On admet que le disque de centre $\Omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,0\right)$ et de rayon 0,5 et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées sont situés entièrement entre la courbe $(\mathscr{C})$ et la courbe $(\mathscr{C}')$.

Déterminer une valeur approchée en unité d'aire au centième près de l'aire de cette partie grisée du plan.