Correction

1. Soit A un réel strictement positif. On pose $I_A = \displaystyle\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Pour calculer $I_A = \displaystyle\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$, on cherche une primitive F de f.

La dérivée de la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$ est $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$.

Donc la fonction F définie par $F(x) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$ est une primitive de la fonction f.

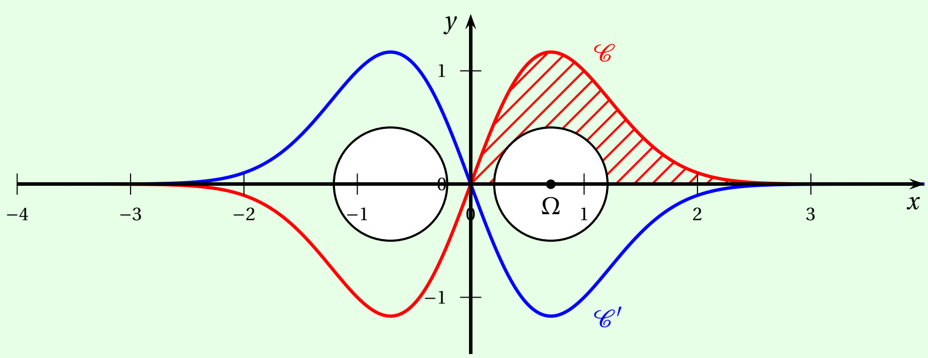
$I_A = \displaystyle\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_0^A = F(A) - F(0) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-A^2+1} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{0+1} = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-A^2+1}\right)$

b. $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -A^2+1 = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-A^2+1} = 0$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} I_A = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

2. On appelle $\mathscr{A}_1$ l'aire située entre la partie de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ et l'axe des abscisses, donc d'après les questions précédentes, $\mathscr{A}_1 = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Pour des raisons de symétrie, l'aire cherchée est 4 fois l'aire hachurée ci-dessous :



L'aire hachurée est égale à l'aire $\mathscr{A}_1$ diminuée de l'aire $\mathscr{A}_2$ du demi-disque de centre Ω et de rayon 0,5.

$$\mathscr{A}_2 = \frac{\pi \times (0{,}5)^2}{2} = \frac{\pi}{8}$$

L'aire cherchée est donc

$$4\left(\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2\right) = 4\left(\frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 2\,\mathrm{e} - \frac{\pi}{2} \approx 3{,}87 \text{ unités d'aire.}$$