Soit $n$ un entier naturel non nul.
On considère la fonction $f_n$ dèfinie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres rèels par

$$f_n(x) = x^2\mathrm{e}^{-2nx}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans un repère orthogonal.
On définit, pour tout entier naturel $n$ non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

**Partie A : Étude de la fonction $f_1$**

1. La fonction $f_1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x}$.
   On admet que $f_1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f_1'$ sa dérivée.
   **a.** Justifier que pour tout réel $x$, $f_1'(x) = 2x\mathrm{e}^{-2x}(1-x)$.
   **b.** Étudier les variations de la fonction $f_1$ sur $\mathbb{R}$.
   **c.** Déterminer la limite de $f_1$ en $-\infty$.
   **d.** Vérifier que pour tout réel $x$, $f_1(x) = \left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^2$. En déduire la limite de $f_1$ en $+\infty$.
2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive $F_1$ de la fonction $f_1$ est donnée par

$$F_1(x) = -\mathrm{e}^{-2x}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

   En déduire la valeur exacte de $I_1$.

**Partie B : Étude de la suite $(I_n)$**

1. Soit $n$ un entier naturel non nul.
   **a.** Interpréter graphiquement la quantité $I_n$.
   **b.** Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite $(I_n)$. Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.
2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel $n$ non nul et pour tout réel $x$ appartenant à $[0\,;\,1]$,

$$f_{n+1}(x) = \mathrm{e}^{-2x}f_n(x).$$

   **b.** En déduire, pour tout entier naturel $n$ non nul et pour tout réel $x$ appartenant à $[0\,;\,1]$,

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$

   **c.** Déterminer alors le sens de variation de la suite $(I_n)$.
3. Soit $n$ un entier naturel non nul.
   **a.** Justifier que pour tout entier naturel $n$ non nul et pour tout réel $x$ appartenant à $[0\,;\,1]$,

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-2nx}.$$

   **b.** En déduire un encadrement de la suite $(I_n)$, puis sa limite.